

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXI - ANNO CXXXIII

(1994)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXI - ANNO CXXXIII

(1994)

LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1995

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento, totale o parziale, sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, ottico o magnetico (comprese copie fotostatiche, microfilm e microfiches).

Prima edizione italiana Gennaio 1995

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2002 2001 2000 1999 1998 1997 1996 1995

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

ISBN 88-207-2493-6

INDICE

E. Barone - <i>Sulle funzioni d'insieme additive a due valori in un semigrupp</i>	pag. 5
G. Mulone, S. Rionero, B. Straughan - <i>Convection with temperature dependent viscosity and thermal conductivity: linear energy stability theory</i>	» 13
R. Raucci - <i>Esistenza per problemi di Stackelberg con funzioni a valori in spazi parzialmente ordinati</i>	» 29
L. Ferranti, S. Bravi, G. de Alteriis - <i>La secca delle formiche di Vivara (Canale d'Ischia, Campania). Osservazioni geomorfologico-strutturali e faunistiche</i>	» 51
G. Cortesani - <i>On the stability of hardy's inequalities</i>	» 67
T. Ricciardi - <i>A limit case for a nonlinear elliptic dirichlet problem</i>	» 91
C. D'Apice - <i>A multiscaled homogenization problem</i>	» 99
L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino - <i>La corrispondenza epistolare tra Ernesto Cesàro e Roberto Marcolongo</i>	» 123
A.C. Simoncelli - <i>About efficient evaluation of $B_{m,k}(f;t)$</i>	» 189
S. Capozziello - <i>Le simmetrie di Nöther in cosmologia quantistica</i>	» 203

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx$

SULLE FUNZIONI D'INSIEME ADDITIVE A DUE VALORI IN UN SEMIGRUPPO

Nota di Enzo Barone[°]

Presentata dal Socio Paolo De Lucia

Adunanza del 15 gennaio 1994

ABSTRACT. In the theory of finitely additive measures (f. a. m.), two-valued measure is same as ultrafilter. If one examines the proof of this, one readily sees that this is true because the f. a. m. take values in the real line.

We consider, in this paper, the problem of characterizing two-valued f. a. m. taking values in a semigroup.

The characterization turns out to be very interesting.

SOMMARIO. Nella teoria delle misure finitamente additive (m.f.a.) , le misure a due valori sono equivalenti ad ultrafiltri. Se si esamina la dimostrazione di ciò, si vede facilmente che ciò dipende dal fatto che le m. f. a. assumono valori nella retta reale.

In questo lavoro si studia il problema della caratterizzazione delle m. f. a. a due valori in un semigrupp. I risultati che si ottengono sembrano piuttosto interessanti.

Key words : 28B10 Semigroup-valued set functions.

[°] Lavoro eseguito con i fondi del M.U.R.S.T. e del C.N.R.

§1. PREMESSA

Sia A un'algebra di sottoinsieme di X . Se $m: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ è additiva a due valori $\{a, b\}$ con $a \neq b$ e $m(\Phi) = a$, allora

$$F = \{ A \in A : m(A) = b \}$$

è un ultrafiltro. In questo lavoro esamineremo le proprietà di F quando $m: A \rightarrow (S, +)$ è additiva a due valori e $(S, +)$ è un semigrupp, cioè $+$ è associativa.

Inoltre vedremo come, viceversa, certi sottoinsiemi F di A , verificanti opportune proprietà, definiscono delle funzioni d'insieme additive a due valori.

Cominciamo con l'osservare che dall'additività di m segue che deve essere

$$(1.1) \quad a + a = a$$

$$(1.2) \quad a + b = b = b + a$$

Inoltre se $B \in F$ si ha

$$(1.3) \quad m(X) = m(B) + m(B^c) = b + m(B^c).$$

A questo punto occorre distinguere due casi: il caso in cui il semigrupp è formato da due soli elementi ed il caso in cui è formato da più di due elementi.

§2. (S,+) E' FORMATO DA DUE SOLI ELEMENTI

In tal caso può essere tanto

$$(2.1) \quad b + b = b$$

che

$$(2.2) \quad b + b = a.$$

Nel caso (2.1), dalla (1.2) e (1.3) segue che $m(X) = b$ e $m(B^c)$ può assumere uno dei due valori $\{a, b\}$.

Nel caso (2.2) invece $m(X)$ può assumere o il valore a o il valore b .

TEOREMA (2.1)

- 1) Se $b + b = b$, allora l'insieme F verifica la proprietà $\Phi \notin F$ e
 $(*) \forall A, B \in A, A \cap B = \Phi : A \cup B \in F \Leftrightarrow (A \in F) \vee (B \in F),$
- 2) Se $b + b = a$, allora l'insieme F verifica la proprietà $\Phi \notin F$
e
 $(**) \forall A, B \in A, A \cap B = \Phi : A \cup B \in F \Leftrightarrow (A \in F) \text{ aut } (B \in F)$

DIM.

Che $\Phi \notin F$ segue dall'ipotesi che $m(\Phi) = a \neq b$.

Siano $A, B \in A$, con $A \cap B = \Phi$. Sante l'additività di m risulta
 $m(A \cup B) = m(A) + m(B).$

- 1) Se $b+b = b$, sarà $m(A \cup B) = b$ se e solo se almeno uno dei due tra
 A e B (o tutti e due) hanno misura b .
- 2) Se invece $b+b = a$, sarà $m(A \cup B) = b$ se e solo se uno solo dei
due ha misura b .

c.v.d.

Proviamo ora il viceversa di questo teorema.

TEOREMA (2.2)

Sia $(S, +)$ un semigruppato formato da due elementi $\{a, b\}$.

- 1) Se $b+b = b$, allora considerato un sottoinsieme non vuoto F di A
tale che $\Phi \notin F$ e verificante la (*) e posto
 $m(A) = b$ se $A \in F$

e d

$$m(A) = a \text{ se } A \notin F,$$

allora m è additiva.

- 2) Se invece $b+b = a$, si ha lo stesso risultato se F è un sottoinsieme
non vuoto F di A tale che $\Phi \notin F$ e verificante la (**).

DIM.

Sia $A, B \in A$, $A \cap B = \Phi$.

- 1) Se $A, B \notin F$, allora per la (*) $A \cup B \notin F$ e quindi $m(A \cup B) = a =$
 $= a + a = m(A) + m(B).$
Se $A, B \in F$ allora per la (*) $A \cup B \in F$ e quindi $m(A \cup B) = b =$
 $= b + b = m(A) + m(B).$
Se $A \notin F, B \in F$ allora per la (*) $A \cup B \in F$ e quindi $m(A \cup B) = b$
 $= a + b = m(A) + m(B).$
Analogamente se $A \in F$ e $B \notin F$.
- 2) Se $A, B \notin F$, allora per la (**) $A \cup B \notin F$ e quindi $m(A \cup B) = a =$
 $= a + a = m(A) + m(B).$
Se $A, B \in F$ allora per la (**) $A \cup B \in F$ e quindi $m(A \cup B) = a =$

$$= b + b = m(A) + m(B).$$

Se $A \notin F$, $B \in F$ allora per la (**) $A \cup B \in F$ e quindi $m(A \cup B) =$

$$= b = a + b = m(A) + m(B).$$

Analogamente se $A \in F$ e $B \notin F$.

In tutti i casi m è additiva

c.v.d.

§3 CASO GENERALE.

Osserviamo che nel caso in cui il semigruppato è formato da un solo elemento non si possono avere funzioni d'insieme a due valori.

Poiché nel §2 abbiamo già trattato il caso di semigruppato formato da due soli elementi, qui consideriamo il caso in cui $(S, +)$ è formato da più di due elementi.

Se $m: A \rightarrow (S, +)$ è additiva a due valori $\{a, b\}$ con $m(\Phi) = a$, allora valgono ancora (1.1) e (1.2), mentre per $b + b$ si possono avere i casi

$$(3.1) \quad b + b = b$$

$$(3.2) \quad b + b = a$$

$$(3.3) \quad b + b \neq a, b$$

TEOREMA (3.1).

L'insieme $F = \{ A \in \mathcal{A} : m(A) = b \}$ verifica le proprietà $\Phi \notin F$ e

- 1) la (*) se $b + b = b$
- 2) la (**) se $b + b = a$
- 3) F è un ultrafiltro se $b + b \neq a, b$.

DIM.

Siano $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \cap B = \Phi$.

1) Se $b + b = b$, allora sarà $m(A \cup B) = b$ se e solo se almeno uno dei due, tra A e B (o tutti e due) hanno misura b .

2) Se $b + b = a$, allora sarà $m(A \cup B) = b$ se e solo se uno solo dei due, tra A e B , ha misura b .

3) Se $b + b \neq a, b$ allora vuol dire che non esistono A e B disgiunti con $m(A) = m(B) = b$, altrimenti per l'additività di m si avrebbe che $b + b$ dovrebbe essere uguale ad a o a b .

Quindi dire che non esistono $A, B \in F$ disgiunti, vuol dire che

$$\forall A, B \in F : A \cap B \neq \emptyset.$$

Proviamo che F è un ultrafiltro.

a) Sia $B \in F$. Allora $m(X) = m(B) + m(B^c) = b + m(B^c)$.

Non può essere $m(B^c) = b$ perché altrimenti $b + b \in \{a, b\}$, quindi $m(B^c) = a$ e $m(X) = b$, cioè $X \in F$.

b) Sia $C \in A$ e $C \supset B \in F$. Risulta

$$m(C) = m(B) + m(C - B) = b + m(C - B).$$

Come prima, non può essere $m(C - B) = b$ altrimenti $b + b \in \{a, b\}$ e quindi dovrà essere $m(C - B) = a$ e poi $C \in F$.

c) Se $A, B \in F$, allora da

$$b + b = m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$$

segue che né $A \cup B$, né $A \cap B$ può avere misura a , altrimenti $b + b \in \{a, b\}$. Quindi dovrà essere in particolare $A \cap B \in F$.

d) Se $A \in A$, non possono essere $A, A^c \notin F$, perché in tal caso si avrebbe

$$b = m(X) = m(A) + m(A^c) = a + a = a.$$

Quindi

$$A \in F \text{ oppure (aut) } A^c \in F.$$

c.v.d.

TEOREMA (3.2).

Sia $(S, +)$ un semigrupp e siano $a, b \in S$ tali che

$$a + a = a, \quad a + b = b = b + a.$$

Sia F un sottoinsieme non vuoto di A tale che $\emptyset \notin F$ e verificante la proprietà:

- 1) la (*) se $b + b = b$
- 2) la (**) se $b + b = a$
- 3) F è un ultrafiltro se $b + b \neq a, b$.

In tutti i casi posto

$$m(A) = b \quad \text{se } A \in F$$

e d

$$m(A) = a \quad \text{se } A \notin F,$$

allora m è additiva, con $m(\emptyset) = a$.

DIM.

Le dimostrazioni nei casi 1) e 2) sono simili a quelle del teorema (2.2).

Vediamo il caso 3).

Siano $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \cap B = \Phi$, allora

a) se $A, B \notin F$, allora $A^c, B^c \in F$, quindi $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in F$, cioè

$$A \cup B \notin F, \text{ e } m(A \cup B) = a + a = m(A) + m(B).$$

b) Se $A \notin F, B \in F$ allora $A \cup B \supset B$, quindi $A \cup B \in F$ e risulta $m(A \cup B) = b = a + b = m(A) + m(B)$.

c) analogamente se $A \in F$ e $B \notin F$.

d) Il caso $A, B \in F$ non può verificarsi perché si è supposto

$A \cap B = \Phi$ e questo in un ultrafiltro non può accadere.

In definitiva m è sempre additiva.

c. v. d.

§4. LEGAMI FRA GLI INSIEMI CHE VERIFICANO (*), QUELLI CHE VERIFICANO (**) E GLI ULTRAFILTRI.

TEOREMA (4.1).

Sia F un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{A}$.

F è un ultrafiltro se e solo se $\Phi \notin F$ e verifica sia la proprietà (*), che la proprietà (**).

DIM.

Osserviamo che se F verifica sia la proprietà (*), che la proprietà (**), allora vuol dire che per ogni $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \cap B = \Phi$, risulta

$$1) A \cup B \in F \Rightarrow (A \in F) \text{ aut } (B \in F)$$

$$2) (A \in F) \vee (B \in F) \Rightarrow A \cup B \in F$$

Sia F un ultrafiltro, $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \cap B = \Phi$.

Se $A \cup B \in F$, allora $(A \in F) \text{ aut } (B \in F)$. infatti se così non fosse, sarebbe $A \notin F, B \notin F$ e quindi $A^c, B^c \in F$ e poi $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in F$, cioè $A \cup B \notin F$ (assurdo).

Viceversa se $(A \in F) \vee (B \in F)$ sicuramente $A \cup B \in F$

e quindi F verificando 1) e 2), verifica sia la (*), che la (**).

Sia ora F un sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{A}$, tale che $\Phi \notin F$ e verificante la 1) e la 2); proviamo che F è un ultrafiltro.

a) Sia $B \in F$. Per la 2) risulta $X = B \cup B^c \in F$.

b) Sia $B \in \mathcal{A}$ con $B \supset A \in F$, allora per la 2) risulta

$$B = A \cup (B - A) \in F.$$

c) Se $A, B \in F$, poiché

$$A = (A \cap B) \cup (A - B) \quad B = (A \cap B) \cup (B - A)$$

per la 1) dovrà essere o $A \cap B \in F$ e $A - B \notin F$ oppure

$A \cap B \notin F$ e $A - B \in F$. Facciamo vedere che il secondo caso non può verificarsi. Infatti se si verificasse si avrebbe $A - B \in F$ e $B - A \in F$ e quindi per la 2) $(A - B) \cup (B - A) \in F$ e per la (1), essendo disgiunti, uno dei due non può essere in F .

d) Per ogni A in A , essendo $X = A \cup A^c$, per la 1) $A \in F$ aut $A^c \in F$

c.v.d.

OSSERVAZIONE. Le classi degli insiemi che verificano la (*), di quelli che verificano la (**) e degli ultrafiltri non coincidono. Infatti si ha il seguente esempio.

Sia $X = \{1, 2, 3\}$, $A = P(X)$. Allora $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ verifica (**), ma non è né un ultrafiltro, né verifica (*); mentre $P(X) - \{\emptyset, \{1\}\}$ verifica (*), ma non è né un ultrafiltro, né verifica (**).

BIBLIOGRAFIA

K.P.S. Bhaskara Rao & M. Bhaskara Rao : Theory of charges .
Academic Press 1983.

Dipartimento di Matematica
Via Arnesano
73100 Lecce, Italy.

Lecce 15/7/1993

CONVECTION WITH TEMPERATURE DEPENDENT VISCOSITY AND THERMAL CONDUCTIVITY: LINEAR ENERGY STABILITY THEORY

Nota di G. Mulone, S. Rionero e B. Straughan

Presentata dal Socio Prof. Salvatore Rionero

Adunanza del 15 gennaio 1994

Riassunto. Si studia la stabilità lineare per il problema della convezione, quando sia la viscosità che la conduttività termica dipendono dalla temperatura. Di fatto, questo è il caso che si presenta nella vita reale. Si ottengono i numeri critici di Rayleigh per il caso in cui l'instabilità rientra nella convezione stazionaria. Si confrontano quindi i risultati così ottenuti con quelli ricavati applicando il metodo dell'energia, e si trova che essi sono molto simili. Ciò può essere interpretato come prova del fatto che non possa verificarsi sovrastabilità o che al più essa sia molto debole.

Abstract. We study the linear stability for the problem of convection, when both the viscosity and the thermal conductivity depend on the temperature. This is, in fact, the situation which is true in real life. We obtain the critical Rayleigh numbers for the case when instability sets in as stationary convection. Then we compare the results so obtained with those we obtain by applying the energy method. We find that they are very close. This may be interpreted as a proof that overstability cannot occur or that it is very weak.

1. Introduction

For many purposes it is adequate to treat thermal conductivity and viscosity as constants. However, when a layer of fluid is subjected to thermal gradients it may be rightly argued that the variation of these coefficients with temperature has to be accounted for. In fact, the instability observed when a layer of fluid is heated

from below and convection cells form has been receiving much recent attention particularly with regard to the variation of viscosity with temperature, see e.g. [2-4], [6,7], [10-17], [20-23], [25-27], [29,30]. The paper of Schubert *et al.* [21] is particularly relevant with regard to convection in the planets, while Thomas & Schubert [26] and Worster *et al.* [30] are appropriate to geophysical situation. We may argue that viscosity and thermal conductivity should always be treated as functions of temperature in convection problems, since they are fluid properties which can change considerably with temperature. The variation of viscosity is usually greater than that of thermal conductivity, see for example the tabulated values given in Rossby [20] and Weast [28]. Weast [28] includes many tables of values of viscosity and thermal conductivity against temperature. Usually the viscosity decreases with increasing temperature, as does the thermal conductivity. However, at normal temperatures and pressures the thermal conductivity of water is an increasing function of temperature. Another fluid which has this curious behaviour is liquid Helium at low temperature, see e.g. Weast [28]. Since the viscosity variation is greater for laboratory fluids, this aspect has been concentrated on, for example a nonlinear energy analysis for the variable viscosity problem is given by Richardson & Straughan [15]. When there are two competing effects such as variable viscosity and thermal conductivity, the analysis is much more involved, and indeed new effects are observed. We might draw the reader's attention to another stability analysis with competing effects, that by Mulone & Rionero [9], where the simultaneous effects of rotation and magnetic field upon convection are investigated.

Among the early studies of convection with temperature-dependent viscosity we mention those of Tippelskirch [25], Palm [12] and Palm *et al.* [13]. The viscosity-temperature relation over a wide range of temperatures is usually a complex exponential relationship. However, for a wide variety of situations the linear relation of Palm *et al.* [13] is adequate, whereby if $\nu(T)$ denotes the kinematic viscosity,

$$\nu(T) = \nu_0(1 - \gamma(T - T_0)) , \quad (1.1)$$

where ν_0 and γ are positive constants and T_0 is a reference temperature. If we examine the tables in Weast [28] we see that the thermal conductivity of many laboratory fluids at room temperatures may be well approximated by a linear relationship also, and so we choose

$$\kappa(T) = \kappa_0(1 - \mu(T - T_0)) , \quad (1.2)$$

where κ_0 , μ are positive constants. Since water does not satisfy (1.2) we also briefly consider the appropriate relation for this liquid, namely

$$\kappa(T) = \kappa_0(1 + \mu(T - T_0)) . \quad (1.3)$$

In the present paper, assuming (1.1) and (1.2) in sections 2 - 4, we study the linear stability for the convection problem with viscosity and thermal conductivity decreasing with increasing temperature in the stress - free boundary case. While in section 5 we consider the case of water. Precisely, in section 2 we obtain the basic motionless solution and write the nondimensional version of the perturbation equations. In section 3 we find the critical Rayleigh numbers for the linear stability of the rest state for the case when instability sets in as stationary convection. In section 4 we apply the energy method to the linear problem obtaining critical Rayleigh numbers very close to those of section 3. This result can be interpreted as a proof that overstability cannot occur or that it is very weak. Finally, in section 5, we present the results obtained in the case of the water.

2. Basic solution

We consider a layer of heat conducting viscous fluid contained between the planes $z = 0$ and $z = d$ with gravity acting in the negative z -direction. The equations governing the fluid motion, taking into account a viscosity variation like (1.1) and a thermal diffusivity variation like (1.2), are

$$v_{i,i} + v_j v_{j,i} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu_0 \{ (1 - \gamma[T - T_0]) 2D_{ij} \}_{,j} - g\delta_{i3}(1 - \alpha(T - T_0)), \quad (2.1)$$

$$v_{i,i} = 0, \quad (2.2)$$

$$T_{,i} + v_i T_{,i} = +\kappa_0 \{ (1 - \mu[T - T_0]) T_{,j} \}_{,j}, \quad (2.3)$$

where g , ρ , α are gravity, (constant) density, and the thermal expansion coefficient, respectively, p is pressure, v_i velocity, and T temperature. The tensor D_{ij} is the symmetric part of the velocity gradient, i.e.

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

The boundaries $z = 0$, d are kept at fixed, constant, temperatures

$$T = T_0, \quad z = 0, \quad T = T_2, \quad z = d,$$

with $T_0 > T_2$.

Due to the dependence of κ on temperature the basic temperature profile is no longer a linear function of the spatial variable z . Nevertheless we require a steady solution of form

$$\bar{v}_i \equiv 0, \quad \bar{T} = \bar{T}(z),$$

with the steady pressure $\bar{p}(z)$ being determined from (2.1). Equation (2.3) may then be integrated twice to find $\bar{T}$ satisfies

$$-\frac{1}{2}\mu\bar{T}^2 + (1 + \mu T_0)\bar{T} = \frac{c_0}{\kappa_0}z + c_1 ,$$

where c_0, c_1 are constants to be determined from the boundary conditions. In fact, with

$$\Delta T = T_0 - T_2 (> 0) ,$$

we may show $\bar{T}$ has form

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu} + T_0 - \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \frac{z}{d} [\mu^2 (\Delta T)^2 + 2\mu \Delta T]} . \quad (2.4)$$

Since the temperature gradient is no longer constant it is convenient to calculate it here, and we find

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = - \frac{\frac{\mu}{2d} (\Delta T)^2 + \frac{\Delta T}{d}}{\sqrt{1 + \frac{z}{d} [\mu^2 (\Delta T)^2 + 2\mu \Delta T]}} . \quad (2.5)$$

This quantity is important in our definition of the Rayleigh number in which we use the temperature gradient evaluated at $z = 0$, although in our interpretation of the results we employ an average temperature gradient. In fact, we define $\beta (> 0)$ to be the absolute value of the temperature gradient at $z = 0$ and from (2.5) we see that

$$\beta = \frac{\mu}{2d} (\Delta T)^2 + \frac{\Delta T}{d} . \quad (2.6)$$

In section 3 we study the stability of the conduction solution (2.4) and with this in mind it is convenient to derive here the equations governing the stability of disturbances to (2.4). Perturbations (u_i, θ, π) to $(\bar{v}_i, \bar{T}, \bar{p})$ are introduced via the relations,

$$v_i = \bar{v}_i + u_i , \quad T = \bar{T} + \theta , \quad p = \bar{p} + \pi ,$$

and we then employ the non-dimensionalization

$$\begin{aligned} t &= t^* \frac{d^2}{\nu_0} , & \pi &= \pi^* P , & P &= \frac{U \nu_0 \rho}{d} , & Pr &= \frac{\nu_0}{\kappa_0} , \\ u_i &= u_i^* U , & \theta &= \theta^* T^\# , & T^\# &= U \sqrt{\frac{\beta \nu_0}{\kappa_0 g \alpha}} , & R &= \sqrt{\frac{\alpha g \beta d^4}{\kappa_0 \nu_0}} , \\ x_i &= x_i^* d , & U &= \frac{\nu_0}{d} , & \Gamma &= \gamma \beta d , & \xi &= 2\mu \beta d , & \Lambda &= \frac{1}{2} \xi . \end{aligned}$$

The *non-dimensional* perturbation equations become (dropping all stars):

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = \pi_{,i} + 2 \left[\left(1 + \frac{2\Gamma z}{1+f} \right) d_{ij} \right]_{,j} + R\theta\delta_{i3} - 2\frac{\Gamma Pr}{R}(\theta d_{ij})_{,j} , \quad (2.7)$$

$$u_{i,i} = 0 , \quad (2.8)$$

$$Pr(\theta_{,t} + u_i \theta_{,i}) = \frac{R}{f} w + (f\theta_{,i})_{,i} + \frac{\xi}{2} \frac{\partial(\theta/f)}{\partial z} - \frac{\Lambda Pr}{R}(\theta\theta_{,i})_{,i} , \quad (2.9)$$

where

$$f = \sqrt{1 + \xi z} , \quad (2.9)_1$$

the spatial domain is now the three-dimensional strip $z \in (0, 1)$, and $d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$.

We employ boundary conditions for surfaces free of tangential stresses and so from Chandrasekhar [5] the boundary conditions on $z = 0$ and $z = 1$ are:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \Delta w = 0 , \quad (2.10)$$

$$\theta = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 .$$

We briefly remark on the case of the thermal conductivity relation (1.3). Again the basic temperature profile is no longer a linear function of the spatial variable z . If we seek a steady solution of form

$$\bar{v}_i \equiv 0 , \quad \bar{T} = \bar{T}(z) ,$$

with the steady pressure $\bar{p}(z)$ determined from (2.1), then equation (2.3) may be integrated twice to find $\bar{T}$ satisfies

$$\frac{1}{2}\mu\bar{T}^2 + (1 - \mu T_0)\bar{T} = \frac{c_0}{\kappa_0}z + c_1 ,$$

where c_0, c_1 are constants to be determined from the boundary conditions. Again, defining

$$\Delta T = T_0 - T_2 (> 0) ,$$

we may show $\bar{T}$ has form

$$\bar{T} = T_0 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \frac{z}{d} [\mu^2 (\Delta T)^2 - 2\mu \Delta T]} . \quad (2.11)$$

The temperature gradient in this case is

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{\frac{\mu}{2d}(\Delta T)^2 - \frac{\Delta T}{d}}{\sqrt{1 + \frac{z}{d}[\mu^2(\Delta T)^2 - 2\mu\Delta T]}} , \quad (2.12)$$

and this is negative as it is easily seen by recollecting $\kappa > 0$. In this situation we may define $\beta(> 0)$ to be the analogous quantity to that defined by (2.6) and so from (2.12) this has value

$$\beta = \frac{\Delta T}{d} - \frac{\mu}{2d}(\Delta T)^2 . \quad (2.13)$$

Henceforth, we restrict attention to the equation (1.2). In section 5 we shall consider the equation (1.3) for water.

3. Critical Rayleigh numbers for the case when instability sets in as stationary convection

The linear versions of (2.7) - (2.9) are:

$$u_{i,t} = -\pi_{,i} + 2(Ad_{ij})_{,j} + R\theta\delta_{i3} , \quad (3.1)$$

$$u_{i,i} = 0 , \quad (3.2)$$

$$Pr\theta_{,t} = \frac{R}{f}w + (f\theta_{,i})_{,i} + \frac{\xi}{2f}\theta_{,z} - \frac{\xi^2}{4f^3}\theta , \quad (3.3)$$

where

$$B(z) = \frac{2\Gamma z}{1+f} , \quad (3.4)$$

$$A(z) = 1 + B(z) . \quad (3.5)$$

The critical Rayleigh numbers of linear theory R_L^2 - for the case when instability sets in as stationary convection - are linked to the linear eigenvalue problems:

$$\pi_{,i} = +2(Ad_{ij})_{,i} + R\theta\delta_{i3} , \quad (3.6)$$

$$u_{i,i} = 0 , \quad (3.7)$$

$$0 = \frac{R}{f}w + (f\theta_{,i})_{,i} + \frac{\xi}{2f}\theta_{,z} - \frac{\xi^2}{4f^3}\theta . \quad (3.8)$$

Equations (3.6) - (3.8) are solved by taking the curcurl of (3.6) and then reducing the system of two equations in w, θ and then employing normal modes. We find the two equations

$$\begin{aligned} D^4 W &= -2 \frac{A'}{A} D^3 W + \left(2a^2 - \frac{A''}{A} \right) D^2 W + 2a^2 \frac{A'}{A} DW \\ &\quad - \left(a^4 + \frac{A''}{A} a^2 \right) W + R \frac{a^2}{A} \Theta, \\ D^2 \Theta &= -\frac{\xi}{f^2} D \Theta + \left(a^2 + \frac{\xi^2}{4f^4} \right) \Theta - R \frac{1}{f^2} W, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where $W(z)$, $\Theta(z)$ are the z -dependent parts of w, θ in a normal mode representation, and a is the horizontal wavenumber. Equations (3.9) are solved numerically by the compound matrix method, subject to the (free surface) boundary conditions

$$W = D^2 W = \Theta = 0, \quad z = 0, 1, \quad (3.10)$$

and then the optimization

$$Ra_L = \min_{a^2} R^2(a^2), \quad (3.11)$$

is carried out via golden section search.

Till now we used a Rayleigh number in which ν, κ and β are defined as their values at the lower boundary $z = 0$. For comparison with experiments it may be preferable to use a Rayleigh number in which these quantities are defined as average values, since these are most likely what is measured. Therefore, in our numerical results we employ such a Rayleigh number.

For the case of $\xi = 0$, we have $\beta = \Delta T/d$ and $\kappa = \kappa_0$, and then we use

$$Ra = \frac{Ra^{old}}{1 + \frac{1}{2}\Gamma},$$

where Ra^{old} is the Rayleigh number defined in section 2.

When $\xi \neq 0$, we must modify this and then we define the average values

$$\begin{aligned} \kappa_m &= \kappa_0 \int_0^1 \sqrt{1 + \xi z} dz = \frac{2\kappa_0}{3\xi} [(1 + \xi)^{3/2} - 1], \\ \nu_m &= \nu_0 \int_0^1 \left(1 - \frac{\gamma}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu} \sqrt{1 + \xi z} \right) dz = \nu_0 \left[1 - \frac{2\Gamma}{\xi} + \frac{4\Gamma}{3\xi^2} \{ (1 + \xi)^{3/2} - 1 \} \right], \\ \beta_m &= -\frac{1}{d} \int_0^d \frac{dT}{dz} dz = \frac{\Delta T}{d}. \end{aligned}$$

The Rayleigh number we now use is then

$$Ra = Ra^{old} \frac{\kappa_0 \nu_0 \beta_m}{\kappa_m \nu_m \beta} ,$$

where, again, Ra^{old} is the Rayleigh number defined in section 2. The coefficient multiplying Ra^{old} is easily calculated and found to be

$$\frac{\kappa_0 \nu_0 \beta_m}{\kappa_m \nu_m \beta} = \frac{3\xi}{2[(1+\xi)^{3/2} - 1] \left[1 - \frac{2\Gamma}{\xi} + \frac{4\Gamma}{3\xi^2} \{(1+\xi)^{3/2} - 1\} \right] \left(1 + \frac{\mu\Delta T}{2} \right)} .$$

But, if we put $\delta = \mu\Delta T (> 0)$, we find $\xi = \delta^2 + 2\delta$, and so $1 + \frac{1}{2}\mu\Delta T = \frac{1 + \sqrt{1+\xi}}{2}$. Then, letting

$$G(\xi) = (1 + \xi)^{3/2} - 1 ,$$

we have

$$Ra = Ra^{old} \frac{3\xi}{[1 + \sqrt{1+\xi}]G(\xi) \left[1 - \frac{2\Gamma}{\xi} + \frac{4\Gamma}{3\xi^2} G(\xi) \right]} .$$

In the following tables we give the critical Rayleigh numbers Ra_L and wave numbers a_L^2 obtained for different values of Γ and ξ .

Γ	ξ	Ra_L	a_L^2
0.0	0.0	657.511	4.935
0.1	0.0	657.309	4.935
0.2	0.0	656.773	4.935
0.3	0.0	655.989	4.935
0.4	0.0	655.020	4.935
0.5	0.0	653.916	4.936

Table 1 Critical Rayleigh and wave numbers for the case when instability sets in as stationary convection.

Γ	ξ	Ra_L	a_L^2
0.0	0.1	657.588	4.935
0.1	0.1	657.249	4.936
0.2	0.1	656.605	4.937
0.3	0.1	655.733	4.937
0.4	0.1	654.692	4.938
0.5	0.1	653.527	4.939

Table 2 Critical Rayleigh and wave numbers for the case when instability sets in as stationary convection.

Γ	ξ	Ra_L	a_L^2
0.0	0.2	657.790	4.935
0.1	0.2	657.336	4.937
0.2	0.2	656.595	4.938
0.3	0.2	655.648	4.940
0.4	0.2	654.544	4.941
0.5	0.2	653.327	4.942
1.0	1.0	647.496	4.979

Table 3 Critical Rayleigh and wave numbers for the case when instability sets in as stationary convection.

These results show that decreasing the viscosity with increasing temperature leads to a smaller critical Rayleigh number which means it is easier for convection to commence. This is correct physically. The effect of decreasing thermal conductivity with increasing temperature lowers the critical Rayleigh number threshold except in the case of ν constant and κ decreasing function of T (which usually does not happen for laboratory fluids).

4. Linear energy stability

The energy method is explained in general in Joseph [8], or the more recent book by Straughan [24]. This method is very rigorous and gives sufficient conditions of stability. Generally it is employed in the nonlinear case, but - of course - it can be used also in the linear case. Here we use the energy method in the linear case to

assure that the true critical Rayleigh values of linear stability are very close to those obtained in section 3 for the case when instability sets in as stationary convection. We use as Lyapunov function the L^2 -energy perturbation E with a suitable coupling parameter. We recall that this can be considered as a first step for acquiring the results of linear stability in the nonlinear context. In fact, in order to dominate the nonlinear terms it is generally enough to add a "complementary" energy (this problem will be considered in a forthcoming paper).

We now commence our linear energy stability. When two competing effects are present, as they are here, an intricate analysis is often required, cf. Mulone & Rionero [9] who treat the problem of convection with both rotation and magnetic field effects present simultaneously. We here deal only with the solution of the energy maximum problem, we do not discuss the existence question; however, we could follow the prescription of Rionero [18,19] and do this.

Let V denote a period cell for the perturbation, and let $\|\cdot\|$ and $\langle\cdot\rangle$ denote the norm on $L^2(V)$ and integration over V , respectively. To establish our linear energy stability result we commence by multiplying (3.1) by u_i , and (3.3) by θ , and then we integrate over V to find:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 = R\langle\theta w\rangle - \|\nabla \mathbf{u}\|^2 - 2\langle B(z)d_{ij}d_{ij}\rangle, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{2} Pr \frac{d}{dt} \|\theta\|^2 = R\langle \frac{w\theta}{f} \rangle - \langle f|\nabla\theta|^2 \rangle - \frac{\xi^2}{8} \langle \frac{\theta^2}{f^3} \rangle. \quad (4.2)$$

We use the energy

$$E = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2} \lambda Pr \|\theta\|^2, \quad (4.3)$$

where λ is a suitable positive coupling parameter.

We add (4.1) + λ (4.2) and obtain

$$\frac{dE}{dt} = RI - D, \quad (4.4)$$

where we have defined I, D by

$$I = \left\langle \left(1 + \frac{\lambda}{f}\right) \theta w \right\rangle, \quad (4.5)$$

$$D = \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + 2\langle B(z)d_{ij}d_{ij}\rangle + \lambda \langle f|\nabla\theta|^2 \rangle + \frac{\lambda}{8} \xi^2 \langle \frac{\theta^2}{f^3} \rangle. \quad (4.6)$$

We commence by following the standard energy method and so define

$$\frac{1}{R_E} = \max_n \frac{I}{D}. \quad (4.7)$$

From (4.4), (4.7) it follows

$$\frac{dE}{dt} \leq \left(\frac{R}{R_E} - 1 \right) D ,$$

therefore the condition

$$R < R_E , \quad (4.8)$$

and the Poincaré inequality (see [1]) gives:

$$E(t) \leq E(0) \exp^{-\alpha_0(R_E-R)t} , \quad (\alpha_0 = \text{constant} > 0) , \quad (4.9)$$

and hence linear exponential stability.

To calculate R_E we derive the Euler-Lagrange equations from (4.7). These are conveniently found by setting $\sqrt{\lambda}\theta = \phi$ in (4.7), and then

$$\frac{I}{D} = \frac{\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{f} \right) \phi w \right\rangle}{\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + 2\langle B d_{ij} d_{ij} \rangle + \langle f |\nabla \phi|^2 \rangle + \frac{\xi^2}{8} \langle \frac{\phi^2}{f^3} \rangle} , \quad (4.10)$$

and the Euler-Lagrange equations for the maximum of this quotient are

$$\begin{aligned} \Delta u_i + (B u_{i,j})_{,j} + (B u_{j,i})_{,i} + R_E \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2f} \right) \phi \delta_{i3} &= \pi_{,i} , \\ (f \phi_{,i})_{,i} - \frac{\xi^2}{8} \frac{\phi}{f^3} + R_E \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2f} \right) w &= 0 . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Equations (4.11) are solved for the critical Rayleigh number of linear energy theory by similar means as the equations (3.6) - (3.8), except in that case we have present the extra parameter λ , and so we find

$$Ra_{EL} = \max_{\lambda} \min_{a^2} R_E^2(a^2; \lambda) . \quad (4.12)$$

The critical Rayleigh numbers we then find are given in the next tables.

Γ	ξ	Ra_{EL}	a_E^2	λ
0.0	0.0	657.511	4.935	1.000
0.1	0.0	657.309	4.935	1.000
0.2	0.0	656.773	4.935	1.000
0.3	0.0	655.989	4.935	1.000
0.4	0.0	655.020	4.935	1.000
0.5	0.0	653.916	4.936	1.000

Table 4 Critical Rayleigh and wave numbers. Subscript EL denotes linear energy. λ is the best value.

Γ	ξ	Ra_{EL}	a_E^2	λ
0.0	0.1	657.550	4.935	1.024
0.1	0.1	657.212	4.936	1.024
0.2	0.1	656.566	4.936	1.024
0.3	0.1	655.696	4.937	1.024
0.4	0.1	654.655	4.938	1.024
0.5	0.1	653.490	4.939	1.024

Table 5 Critical Rayleigh and wave numbers. Subscript EL denotes linear energy. λ is the best value.

Γ	ξ	Ra_{EL}	a_E^2	λ
0.0	0.2	657.654	4.935	1.048
0.1	0.2	657.199	4.936	1.048
0.2	0.2	656.459	4.938	1.048
0.3	0.2	655.511	4.939	1.048
0.4	0.2	654.407	4.941	1.048
0.5	0.2	653.190	4.942	1.048
1.0	1.0	645.591	4.974	1.209

Table 6 Critical Rayleigh and wave numbers. Subscript EL denotes linear energy. λ is the best value.

Comparing tables 1,4; 2, 5; 3, 6 we see that Ra_{EL} in each case considered here is very close to Ra_L . This can be interpreted as a proof that overstability cannot occur or that it is very weak.

5. The case of water

As pointed out in the introduction, at normal temperatures and pressures the thermal conductivity of water is an increasing function of temperature. The same happens for the liquid Helium at low temperatures (see e.g. Weast [28] p.E-1). In this section we consider specifically the case of water.

Employing the non-dimensionalization used in section 2, we get

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = -\pi_{,i} + 2 \left[\left(1 + \frac{2\Gamma z}{1+f} \right) d_{ij} \right]_{,j} + R\theta\delta_{i3} - 2\frac{\Gamma Pr}{R}(\theta d_{ij})_{,j}, \quad (5.1)$$

5. The case of water.

As pointed out in the introduction, at normal temperatures and pressures the thermal conductivity of water is an increasing function of temperature. The same happens for the liquid Helium at low temperatures (see e.g. Weast [28] p. E-1). In this section we consider specifically the case of water.

Employing the non-dimensionalization used in section 2, we get

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} = -\pi_{,i} + 2 \left[\left(1 + \frac{2\Gamma z}{1+f} \right) d_{ij} \right]_{,j} + R\theta\delta_{i3} - 2 \frac{\Gamma Pr}{R} (\theta d_{ij})_{,j}, \quad (5.1)$$

$$u_{i,i} = 0, \quad (5.2)$$

$$Pr(\theta_{,t} + u_i \theta_{,i}) = \frac{R}{f} w + (f \theta_{,i})_{,i} - \frac{\xi}{2} \frac{\partial(\theta/f)}{\partial z} + \frac{\Lambda Pr}{R} (\theta \theta_{,i})_{,i}, \quad (5.3)$$

where

$$f = \sqrt{1 - \xi z}. \quad (5.4)$$

We now note that (5.1)-(5.4) formally can be obtained from (2.7)-(2.9), (2.9)₁ by exchanging ξ with $-\xi$. In order to be sure that (5.4) is real one has to verify that $\xi < 1$. This is true since $\xi < 1$ is equivalent to $\mu\Delta T < 1$, and this last inequality holds by observing that $\frac{k(T_2)}{k(T_0)} = 1 - \mu\Delta T > 0$. Now we observe that, from definitions of Γ and ξ in section 2, it follows that $\Gamma = \frac{\gamma}{2\mu}\xi$. From the tables given in Weast [28] for the water, we can assume $\mu = 10^{-3}$ and $\gamma = .011$ and then $\Gamma = 5.5\xi$. Proceeding in the same way as in sections 3,4, we determine here the critical Rayleigh numbers Ra_L for the case when instability sets in as stationary convection and the critical Rayleigh numbers with the energy method by assuming the same mean Rayleigh number introduced in section 3.

In the next table, we obtain the critical values Ra_L and Ra_{EL} for different values of ξ which correspond to differences of temperatures ΔT of 5,10,15,20,25,30 degrees. We find a small decrease of the Rayleigh numbers Ra_L and Ra_{EL} and their coincidence. We finally observe that we had obtained the same critical values if we should have used in the definition of Ra_L and Ra_{EL} the viscosity and the thermal conductivity evaluated at the mean of the boundary temperatures. This definition in fact is sometimes convenient for the experiments (see [29]).

$$u_{i,i} = 0, \quad (5.2)$$

$$Pr(\theta_{,i} + u_{i,i}) = \frac{R}{f}w + (f\theta_{,i})_{,i} - \frac{\xi}{2} \frac{\partial(\theta/f)}{\partial z} + \frac{\Delta Pr}{R}(\theta\theta_{,i})_{,i}, \quad (5.3)$$

where

$$f = \sqrt{1 - \xi z}. \quad (5.4)$$

We now note that (5.1) - (5.4) formally can be obtained from (2.7) - (2.9), (2.9)₁ by exchanging ξ with $-\xi$. In order to be sure that (5.4) is real one has to verify that $\xi < 1$. This is true since $\xi < 1$ is equivalent to $\mu\Delta T < 1$, and this last inequality holds by observing that $\frac{k(T_2)}{k(T_0)} = 1 - \mu\Delta T > 0$. Now we observe that, from definitions of Γ and ξ in section 2, it follows that $\Gamma = \frac{\gamma}{2\mu}\xi$. From the tables given in Weast [28] for the water, we can assume $\mu = 10^{-3}$ and $\gamma = 0.11$ and then $\Gamma = 5.5\xi$. Proceeding in the same way as in sections 3, 4, we determine here the critical Rayleigh numbers Ra_L for the case when instability sets in as stationary convection and the critical Rayleigh numbers with the energy method by assuming the same mean Rayleigh number introduced in section 3.

In the next table, we obtain the critical values Ra_L and Ra_{EL} for different values of ξ which correspond to differences of temperatures ΔT of 5, 10, 15, 20, 25, 30 degrees. We find a small decrease of the Rayleigh numbers Ra_L and Ra_{EL} and their coincidence. We finally observe that we had obtained the same critical values if we should have used in the definition of Ra_L and Ra_{EL} the viscosity and the thermal conductivity evaluated at the mean of the boundary temperatures. This definition in fact is sometimes convenient for the experiments (see [29]).

Γ	ξ	Ra_L	a_L^2	Ra_{EL}	a_E^2	λ
0.0549	0.0100	657.457	4.935	657.455	4.935	0.997
0.1094	0.0199	657.312	4.935	657.310	4.935	0.995
0.1638	0.0298	657.178	4.934	657.175	4.934	0.992
0.2178	0.0396	656.768	4.934	656.761	4.934	0.990
0.2716	0.0494	656.420	4.934	656.409	4.934	0.988
0.3250	0.0591	656.033	4.934	656.012	4.934	0.985

Table 7 Critical Rayleigh and wave numbers for water.

Acknowledgments. This work has been supported by the Italian C.N.R., G.N.F.M. and by the Italian Ministry for University and Scientific Research (M.U.R.S.T.) under 40% and 60% contracts.

References

1. R.A. ADAMS, *Sobolev spaces*. New York, Academic Press (1975).
2. J.R. BOOKER, *J. Fluid Mech.* **76**, 741 (1976).
3. F.H. BUSSE, *J. Fluid Mech.* **30**, 625 (1967).
4. F.H. BUSSE AND H. FRICK, *J. Fluid Mech.* **150**, 451 (1985).
5. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications. New York (1981).
6. M.C. DEPASSIER AND E.A. SPIEGEL, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **21**, 167 (1982).
7. D.R. JENKINS, *J. Fluid Mech.* **178**, 491 (1987).
8. D.D. JOSEPH, *Stability of fluid motions. I and II*. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1976).
9. G. MULONE AND S. RIONERO, *ZAMM* **73** 1, 35 (1993).
10. D.S. OLIVER AND J.R. BOOKER, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **27**, 73 (1983).
11. A.C. OR, *J. Fluid Mech.* **206**, 497 (1989).
12. E. PALM, *J. Fluid Mech.* **8**, 183 (1960).
13. E. PALM, T. ELLINGSEN AND B. GJEVIK, *J. Fluid Mech.* **30**, 651 (1967).
14. S. PAOLUCCI AND D.R. CHENOWETH, *Phys. Fluids* **30**, 1561 (1987).
15. L. RICHARDSON AND B. STRAUGHAN, *Acta Mech.* **97**, 41 (1993).
16. F.M. RICHTER, *J. Fluid Mech.* **89**, 553 (1978).
17. F.M. RICHTER, H.C. NATAF AND S.F. DALY, *J. Fluid Mech.* **129**, 173 (1983).
18. S. RIONERO, *Ann. Mat. Pura Appl.* **76**, 75 (1967).
19. S. RIONERO, *Ann. Mat. Pura Appl.* **78**, 339 (1968).
20. H.T. ROSSBY, *J. Fluid Mech.* **36**, 309 (1969).

21. G. SCHUBERT, D.L. TURCOTTE AND E.R. OXBURGH, *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **18**, 441 (1969).
22. M.K. SMITH, *J. Fluid Mech.* **188**, 547 (1988).
23. K.C. STENGEL, D.S. OLIVER AND J.R. BOOKER *J. Fluid Mech.* **120**, 411 (1982).
24. B. STRAUGHAN, *The energy method, stability, and nonlinear convection*. Springer Verlag: Ser. in Appl. Math. Sci., vol. **91**, (1992).
25. H. TIPPELSKIRCH, *Beit. zur Physik der Atmosphäre* **29**, 37 (1956).
26. P.J. THOMAS AND G. SCHUBERT, *J. Geophys. Res.* **B 91**, D453 (1986).
27. K.E. TORRANCE AND D.L. TURCOTTE, *J. Fluid Mech.* **47**, 113 (1971).
28. R.C. WEAST, *Handbook of Chemistry and Physics*. 69th ed. C.R.C. Press, Inc., Boca Raton, Florida (1988).
29. D.B. WHITE, *J. Fluid Mech.* **191**, 247 (1988).
30. M.G. WORSTER, H.E. HUPPERT AND R.S.J. SPARKS, *Earth Planet Sci. Lett.* **101**, 78 (1990).

ESISTENZA PER PROBLEMI DI STACKELBERG CON FUNZIONI A VALORI IN SPAZI PARZIALMENTE ORDINATI

Nota di Roberto Raucchi

Presentata dal Socio Paolo de Lucia

Adunanza del 5 marzo 1994

Riassunto: In questo lavoro si considera un problema di ottimizzazione a due livelli corrispondente a un gioco di Stackelberg nel caso di unicità della risposta del follower. Le funzioni di pagamento dei giocatori sono a valori in $\mathbb{R}^n$, parzialmente ordinato mediante la relazione indotta da un cono C chiuso, convesso e tale che: $\text{int}C \neq \emptyset$ e $C \cap (-C) = \{0\}$. In particolare viene presentato un risultato di esistenza.

Abstract: In this paper a two-level optimization problem corresponding to a Stackelberg game in the case in which the solutions set to the lower level problem is a singleton is considered. The loss function of the players have vector valued in $\mathbb{R}^n$ with the partial ordering induced by a closed, convex cone C such that: $\text{int}C \neq \emptyset$ and $C \cap (-C) = \{0\}$. In particular an existence result is presented.

1 INTRODUZIONE

In questo lavoro viene considerato un problema di Stackelberg e cioè un problema di ottimizzazione a due livelli corrispondente a un gioco a due giocatori, P_1 e P_2 ,

in cui il giocatore P_1 ha la leadership nel giocare. Siano X e Y gli insiemi delle decisioni rispettivamente di P_1 e P_2 , f e g le rispettive funzioni di pagamento definite entrambe su $X \times Y$. Si supponga che il giocatore P_1 , detto leader, conosca entrambe le funzioni f e g e dichiari la propria decisione per primo e che il giocatore P_2 , detto follower, conosca solo g e la decisione annunciata dal leader. Lo scopo di entrambi i giocatori, supposti razionali, è quello di minimizzare la propria funzione di pagamento e quindi se il leader dichiara la decisione $x \in X$, il follower sceglie la propria risposta tra quelle decisioni che minimizzano la funzione g .

Questi giochi furono introdotti da Von Stackelberg([23]), con funzioni di pagamento a valori in $\mathbb{R}$, per problemi economici statici e sono stati presentati in versione dinamica da C.Chen e J.B.Cruz([4]), M.Simaan e J.B.Cruz([22]) T.Basar e G.J.Olsder([2]).....Un grande numero di lavori è stato dedicato a questi giochi : una buona lista di riferimenti, fino al 1982, può essere trovata in [2] specialmente sul caso dinamico e in [1], fino al 1984, per le applicazioni ai modelli economici. Diversi risultati di esistenza, buona posizione e stabilità sono noti per il problema di Stackelberg con funzioni di pagamento a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nel caso di unicità della risposta del follower, un teorema di esistenza e buona posizione con ipotesi di natura sequenziale e di carattere "minimale" (come è la semicontinuità inferiore per l'esistenza del minimo nel

teorema di Weierstrass) è stato presentato in [20]. Per quanto riguarda la stabilità delle soluzioni in ambito sequenziale si rimanda a [13].

Invece nel caso di non unicità della risposta del follower è noto che l'esistenza dell'equilibrio di Stackelberg debole (nel senso di [3]) non è garantita neppure dalla compattezza degli spazi delle decisioni e dalla continuità delle funzioni di pagamento ([2]). Per questa ragione, in tal caso, sono state studiate l'esistenza e la stabilità di soluzioni approssimanti sia in ambito sequenziale in assenza di vincoli espliciti (da [14] a [19]) che in ambito topologico nei vari casi di vincoli possibili ([11]). Per quanto riguarda i problemi di Stackelberg forti (nel senso di [3]) si rimanda a [12].

Nelle situazioni in cui il giocatore ha più scopi è opportuno modellizzare il gioco considerando, invece di funzioni a valori in $\mathbb{R}$, funzioni a valori in uno spazio parzialmente ordinato. Per tali casi non sono noti risultati di esistenza e stabilità delle soluzioni di problemi di Stackelberg. Tuttavia si osservi che a differenza di quanto avviene per gli equilibri di Stackelberg, esistono risultati di esistenza per i minimi di Pareto deboli, per i punti sella e per gli equilibri di Nash anche quando le funzioni dei giocatori sono a valori in uno spazio parzialmente ordinato. Per esempio, in [6] e [7] sono stati presentati alcuni teoremi di minimax per giochi in cui le funzioni di pagamento sono a valori in uno spazio vettoriale topologico

localmente convesso di Hausdorff parzialmente ordinato rispetto a un cono chiuso, convesso e tale che: $C \cap (-C) = \{0\}$ e $\text{int } C \neq \emptyset$. Inoltre in [9] è stato presentato un risultato di esistenza per gli equilibri di Nash per giochi in cui è data una relazione di preferenza non totale.

Nel paragrafo 2 di questo lavoro, dopo aver ricordato le diverse formulazioni dei tipi di problemi di Stackelberg già noti in letteratura con le funzioni di pagamento dei giocatori a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ([10]), viene considerato il caso di unicità della risposta del follower e richiamato un teorema di esistenza a ipotesi minimali ([20]) che sarà esteso al problema con funzioni di pagamento a valori vettoriali. Segue una formulazione, nel caso di unicità della risposta del follower, di un problema di Stackelberg con le funzioni di pagamento a valori in uno spazio parzialmente ordinato.

Nel paragrafo 3 sono richiamate le definizioni e le proposizioni, già presentate in [21], necessarie per pervenire al suddetto risultato di esistenza.

Infine, nel paragrafo 4, limitatamente al caso di unicità della risposta del follower, viene provato e illustrato un risultato di esistenza per problemi di Stackelberg con funzioni di pagamento a valori in $\mathbb{R}^n$ parzialmente ordinato mediante la relazione indotta da un cono.

2 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione a due livelli relativo a un gioco statico a due giocatori.

Siano X e Y gli spazi topologici delle decisioni dei due giocatori e f e g le loro funzioni di pagamento definite in $X \times Y$ e a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Posto, per ogni $x \in X$, $R(x) = \{z \in Y : g(x, z) \leq g(x, y) \text{ per ogni } y \in Y\}$ si supponga che $R(x)$ sia un singleton per ogni $x \in X$. In tale ipotesi si consideri il seguente problema, detto di Stackelberg ([23]):

$$(S) \begin{cases} \text{determinare } \bar{x} \in X \text{ tale che:} \\ f(\bar{x}, \tilde{y}(\bar{x})) = \inf_{x \in X} f(x, \tilde{y}(x)) \\ \text{ove } \tilde{y}(x) \text{ indica l'unico elemento di } R(x). \end{cases}$$

Osservazione 2.1

Nel caso di non unicit  della risposta del follower si possono definire diverse generalizzazioni del problema di Stackelberg tra le quali le seguenti:

$$(S_1) \begin{cases} \text{determinare } \bar{x} \in X \text{ tale che:} \\ \sup_{y \in R(\bar{x})} f(\bar{x}, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in R(x)} f(x, y) \\ \text{ove } R(x) = \{z \in Y : g(x, z) \leq g(x, y) \forall y \in Y\} \end{cases}$$

detto Problema di Stackelberg debole (nel senso di [3]), generalizzato (nel senso di [10]);

$$(S_2) \quad \begin{cases} \text{determinare } \bar{x} \in X \text{ tale che:} \\ \inf_{y \in R(\bar{x})} f(\bar{x}, y) = \inf_{x \in X} \inf_{y \in R(x)} f(x, y) \\ \text{ove } R(x) = \{z \in Y : g(x, z) \leq g(x, y) \ \forall y \in Y\} \end{cases}$$

detto Problema di Stackelberg forte (nel senso di [3]).

Si richiama il seguente risultato di esistenza che sarà generalizzato nel paragrafo 4.

Proposizione 2.1 ([20] corollario 5.1)

Siano X e Y spazi topologici di Hausdorff e f, g funzioni definite in $X \times Y$ ed a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Se le seguenti ipotesi sono soddisfatte:

- (2.1) X e Y sono spazi sequenzialmente compatti;
- (2.2) f e g sono funzioni sequenzialmente semicontinue inferiormente (s.c.i.);
- (2.3) per ogni $x \in X$, per ogni $y \in Y$, per ogni successione (x_n) convergente a x esiste una successione (y_n) contenuta in Y tale che:

$$\limsup g(x_n, y_n) \leq g(x, y);$$
- (2.4) $R(x)$ è un singleton per ogni $x \in X$,

allora esiste una soluzione del problema (S).

Adesso si considera il caso in cui le funzioni dei giocatori sono a valori in $\mathbb{R}^n$ parzialmente ordinato mediante la relazione $\leq_c$ indotta da un cono C convesso, chiuso e tale che: $\text{int} C \neq \emptyset$ e $C \cap (-C) = \{0\}$.

Posto, per ogni $x \in X$:

$$(2.5) \quad R_f(x) = \{z \in Y : g(x, z) \leq_c g(x, y) \quad \forall y \in Y\}$$

e supposto che $R_f(x)$ sia sempre un singleton, chiamiamo "problema di Stackelberg vettoriale" il seguente problema:

$$(S_v) \begin{cases} \text{determinare } \bar{x} \in X \text{ tale che non esista } x \in X: \\ f(x, y(x)) <_c f(\bar{x}, \tilde{y}(\bar{x})) \\ \text{ove } \tilde{y}(x) \text{ indica l'unico elemento di } R_f(x) \end{cases}$$

Definizione 2.1

Si dice "soluzione di Stackelberg vettoriale" ogni soluzione del problema (S_v) ; si dice "equilibrio di Stackelberg vettoriale" ogni coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tale che $\bar{x}$ è soluzione di Stackelberg vettoriale e:

$$(2.6) \quad \bar{y} = \tilde{y}(\bar{x})$$

3 RICHIAMI

In questo paragrafo vengono richiamati concetti e risultati già presentati in [21].

Sia V uno spazio vettoriale reale topologico localmente convesso, soddisfacente il primo assioma di numerabilità e di Hausdorff. Sia C un cono in V convesso, chiuso, tale che $C \cap (-C) = \{0\}$ e $\text{int } C \neq \emptyset$. Si consideri la relazione d'ordine parziale $\leq_c$ in V indotta dal cono C definita ponendo:

$$(3.1) \quad \text{per ogni } a, b \in V, a \leq_c b \text{ se e solo se } b - a \in C.$$

Se B è un sottoinsieme di V , si indichi con $\text{Min } B$ e $\text{Max } B$, rispettivamente, l'insieme degli elementi minimali di B e

l'insieme degli elementi massimali di B e cioè:

$\text{Min } B = \{u \in B : \text{non esiste } b \in B : b <_C u\}$

$\text{Max } B = \{u \in B : \text{non esiste } b \in B : u <_C b\}.$

A questo punto si possono definire i concetti di limite inferiore e limite superiore rispetto al cono C di successioni di punti contenute in compatti di V.

Definizione 3.1

Sia $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti contenuta in un compatto di V. Si pone:

$$\text{Lim inf}_C v_n = \text{Min Lim sup } \{v_n\};$$

$$\text{Lim sup}_C v_n = \text{Max Lim sup } \{v_n\}.$$

Poichè per ogni successione (v_n) contenuta in un compatto $\text{Lim sup } \{v_n\}$ (nel senso di Kuratowski, [8]) contiene sia elementi minimali che elementi massimali ([21], Prop.2.1) la definizione 3.1 è ben posta e gli insiemi $\text{Lim inf}_C v_n$ e $\text{Lim sup}_C v_n$ sono non vuoti.

Adesso si enuncia una proposizione che sarà utilizzata nella dimostrazione del teorema di esistenza del paragrafo 4.

Proposizione 3.1

Siano $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni convergenti rispettivamente a v ed a w. Se esiste una successione estratta (v_{n_k}) tale che $v_{n_k} \leq_C w_{n_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $v \leq_C w$.

Osservazione 3.1

Poichè per ogni compatto B di V si ha ([21], Prop.2.2):

$$(3.2) \quad B \subseteq \text{Min} B + C;$$

$$(3.3) \quad B \subseteq \text{Max} B - C$$

se $\text{Lim sup } \{v_n\}$ è compatto, sia $\text{Lim sup}_C v_n$ che $\text{Lim inf}_C v_n$ sono non vuoti e inoltre risulta:

$$(3.4) \quad \text{per ogni } v \in \text{Lim sup} \{v_n\} \text{ esiste } w \in \text{Lim inf}_C v_n \\ \text{tale che } w \leq_C v$$

$$(3.5) \quad \text{per ogni } v \in \text{Lim sup} \{v_n\} \text{ esiste } w \in \text{Lim sup}_C v_n \\ \text{tale che } v \leq_C w.$$

Si noti che ovviamente $\text{Lim inf}_C v_n$ e $\text{Lim sup}_C v_n$ sono insiemi e quindi per confrontarli tra loro oppure con singleton di elementi di V è necessario introdurre una relazione d'ordine tra insiemi.

Definizione 3.2

Sia $T = \{X: X \text{ è parte non vuota di } V \text{ tale che se } a, b \in X, a \neq b \text{ allora } a \text{ e } b \text{ sono non confrontabili mediante la relazione } \leq_C\}$. Se $A, B \in T$ si pone:

$$(3.6) \quad A \leq_1 B \text{ se e solo se per ogni } a \in A \text{ esiste } b \in B, \text{ tale} \\ \text{che } a \leq_C b;$$

$$(3.7) \quad A \leq_2 B \text{ se e solo se per ogni } b \in B \text{ esiste } a \in A \text{ tale} \\ \text{che } a \leq_C b;$$

$$(3.8) \quad A \leq B \text{ se e solo se } A \leq_1 B \text{ e } A \leq_2 B.$$

Osservazione 3.2

Si noti che se $A \leq_1 B$ per ogni $(a,b) \in A \times B$ non può risultare $b <_c a$. Vale, ovviamente, la stessa conclusione anche nel caso in cui $A \leq_2 B$.

Si noti inoltre che se A è un singleton, da $A \leq_2 B$ segue che $A \leq B$ e che se B è un singleton, da $A \leq_1 B$ segue che $A \leq B$.

Per riuscire a confrontare gli insiemi $\text{Lim sup}_c v_n$ e $\text{Lim inf}_c v_n$ con $v \in V$ anche nel caso in cui la successione (v_n) non è contenuta in alcun compatto si richiamano le definizioni seguenti.

D'ora in avanti si suppone anche che V sia uno spazio metrico, la cui metrica sarà indicata con d .

Definizione 3.3

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in V e sia $v \in V$. Si dice che x_n diverge (positivamente) a $+\infty$ rispetto a v e si scrive $x_n \rightarrow +\infty_v$ se, e solo se,

$$\begin{cases} d(x_n, v) \rightarrow +\infty \\ d(x_n, v+C) \rightarrow 0 \end{cases};$$

si dice che x_n diverge (negativamente) a $-\infty$ rispetto a v e si scrive $x_n \rightarrow -\infty_v$ se, e solo se,

$$\begin{cases} d(x_n, v) \rightarrow +\infty \\ d(x_n, v-C) \rightarrow 0 \end{cases}.$$

In altri termini si può affermare che $x_n \rightarrow +\infty_v$ se, e solo se, la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende "ad allontanarsi" da v e, nello

stesso tempo, tende "ad avvicinarsi" a $v+C=\{w \in V: v \leq_c w\}$.

Analogamente si può affermare che $x_n \rightarrow -\infty_v$ se, e solo se, la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende "ad allontanarsi" da v e, nello stesso tempo, tende "ad avvicinarsi" a $v-C=\{w \in V: w \leq_c v\}$.

E' adesso utile considerare un ampliamento dell'insieme V mediante gli elementi ausiliari del tipo $+\infty_v, -\infty_v$. Non è necessario, per gli scopi di questo lavoro, dotare questo nuovo insieme di topologia, né di struttura di spazio vettoriale, né di relazione d'ordine. Detto insieme sarà indicato con $\hat{V}$; si pone cioè:

$$\hat{V} = V \cup \{+\infty_v : v \in V\} \cup \{-\infty_v : v \in V\}.$$

Definizione 3.4

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in V .

Si pone: $\text{Lim}^{\wedge}_{\sup_c} \{x_n\} = \{x \in \hat{V} \text{ tali che esiste un'estratta } (x_{n_k}) \text{ da } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ per la quale risulti: } x_{n_k} \rightarrow x\}$.

A questo punto è possibile confrontare $\text{Lim} \inf_c x_n$ con $v \in V$ anche quando $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di punti di V non contenuta in alcun compatto.

Definizione 3.5

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in V e $v \in V$. Si dice che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è dotata di $\text{Lim} \inf$ maggiorante v , rispetto a C , e si scrive $\text{Lim} \inf_c x_n \geq_* v$ se, e solo se,

$$\begin{cases}
 (3.9) & \forall x_{n_k} \text{ risulta } \text{Lim}^{\wedge} \sup_C \{x_{n_k}\} \neq \emptyset \\
 (3.10) & \forall w \in \text{Lim sup } \{x_n\} \text{ risulta } v \leq_C w \\
 (3.11) & \text{se esiste } w \in V: x_{n_k} \rightarrow +\infty_w, \text{ allora } x_{n_k} \rightarrow +\infty_v \\
 (3.12) & \forall x_{n_k} \forall w \in V \text{ non risulta } x_{n_k} \rightarrow -\infty_w
 \end{cases}$$

si dice, invece, che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è dotata di Lim sup minorante v rispetto a C , e si scrive $\text{Lim sup}_C x_n \leq_* v$ se, e solo se,

$$\begin{cases}
 \forall x_{n_k} \text{ risulta } \text{Lim}^{\wedge} \sup_C \{x_{n_k}\} \neq \emptyset \\
 (3.13) & \forall w \in \text{Lim sup } \{x_n\} \text{ risulta } w \leq_C v \\
 (3.14) & \text{se esiste } w \in V: x_{n_k} \rightarrow -\infty_w, \text{ allora } x_{n_k} \rightarrow -\infty_v \\
 (3.15) & \forall x_{n_k} \forall w \in V \text{ non risulta } x_{n_k} \rightarrow +\infty_w.
 \end{cases}$$

In altri termini si può affermare che $\text{Lim inf}_C x_n \geq_* v$ se, e solo se, ogni estratta da (x_n) :

- 1) ha punti di aderenza o , se ne è priva, diverge;
- 2) ogni suo punto di aderenza è maggiore oppure uguale a v secondo la relazione $\leq_C$;
- 3) se diverge positivamente, tende "ad avvicinarsi" a $v+C = \{w \in V: v \leq_C w\}$;
- 4) non diverge negativamente.

Discorso analogo può essere svolto circa la scrittura:

$$\text{Lim sup}_C x_n \leq_* v.$$

Nell'osservazione 2.5 di [21] si dimostra che la relazione $\leq_*$ è un'estensione della relazione $\leq$ nel senso che se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione contenuta in un compatto di V allora si ha: $\text{Lim inf}_C x_n \geq_* v$ se, e solo se, $\text{Lim inf}_C x_n \geq \{v\}$.

Ora si può definire in maniera naturale una nuova nozione di funzione semicontinua inferiormente e di funzione semicontinua superiormente rispetto al cono C.

Definizione 3.6

Sia A uno spazio topologico soddisfacente il primo assioma di numerabilità e f una funzione definita in A ed a valori in V.

Si dice che f è fortemente semicontinua inferiormente rispetto al cono C se per ogni $x \in A$ e per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x si ha:

$$\liminf_c f(x_n) \geq_* f(x);$$

si dice che f è fortemente semicontinua superiormente rispetto al cono C se per ogni $x \in A$ e per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x si ha:

$$\limsup_c f(x_n) \leq_* f(x).$$

Osservazione 3.3

Si noti che se f è continua allora per ogni $x \in A$ e per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x, risulta:

$\limsup \{f(x_n)\} = \{f(x)\}$ e quindi:

$\liminf_c f(x_n) = \limsup_c f(x_n) = \{f(x)\}$ e pertanto, ovviamente, f risulta fortemente semicontinua sia inferiormente che superiormente rispetto al cono C (indipendentemente dalla scelta del cono C).

Osservazione 3.4

La nozione classica di C-s.c.i. è la seguente: $\forall \lambda \in V$ l'insieme $\{x \in A: f(x) \leq_c \lambda\}$ è chiuso (vedere, ad esempio, [6]). Per i confronti tra la nozione di semicontinuità data nella definizione 3.6 e la classica si rimanda a [21].

4 UN RISULTATO DI ESISTENZA

Si consideri un problema di Stackelberg corrispondente a un gioco statico a due giocatori in cui siano X e Y gli insiemi delle decisioni rispettivamente del leader e del follower e f_1 e f_2 le rispettive funzioni di pagamento a valori in $\mathbb{R}^n$ parzialmente ordinato rispetto a un cono C chiuso, convesso e tale che: $C \cap (-C) = \{0\}$ e $\text{int } C \neq \emptyset$.

Segue, adesso, un risultato di esistenza per gli equilibri di Stackelberg vettoriali.

Proposizione 4.1

Siano X e Y spazi compatti di Hausdorff verificanti il primo assioma di numerabilità, f_1, f_2 funzioni definite in $X \times Y$ ed a valori in $\mathbb{R}^n$ e C un cono convesso, chiuso e tale che $C \cap (-C) = \{0\}$, $\text{int } C \neq \emptyset$. Se le seguenti ipotesi sono soddisfatte:

(4.1) f_1 è C-s.c.i.;

(4.2) f_2 è fortemente C-s.c.i.;

(4.3) per ogni $x \in X$, per ogni $y \in Y$ per ogni successione (x_n) convergente a x esiste una successione

(y_n) contenuta in Y e tale che:

$$\limsup_c f_2(x_n, y_n) \leq_* f_2(x, y);$$

(4.4) $R_f(x)$ è un singleton per ogni $x \in X$,

allora esiste un equilibrio di Stackelberg vettoriale.

Dim.

Da (4.4) per ogni $x \in X$ l'insieme $R_f(x)$ è costituito da un solo elemento che indichiamo con $\hat{y}(x)$. Siano $x \in X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente a x e $(\hat{y}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ la corrispondente successione in Y . Poichè Y è compatto esiste un'estratta $\hat{y}(x_{n_k})$, da $(\hat{y}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, convergente a un punto di Y . Sia $\bar{y}$ il limite di $\hat{y}(x_{n_k})$. Risulta:

$$(4.5) \quad f_2(x, \bar{y}) \leq_c f_2(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

Infatti, comunque fissato $y \in Y$, dalla (4.3) esiste una successione (y_k) tale che:

$$\limsup_c f_2(x_{n_k}, y_k) \leq_* f_2(x, y).$$

Allora esiste una successione estratta da $f_2(x_{n_k}, y_k)$,

indicata ancora con $f_2(x_{n_k}, y_k)$, convergente a un punto di $f_2(x, y) - C$ oppure divergente negativamente rispetto al punto $f_2(x, y)$. In entrambi i casi la distanza

$d(f_2(x_{n_k}, y_k), f_2(x, y) - C)$ tende a 0 al tendere di k a ∞ .

Pertanto, poichè per ogni $\alpha \in f_2(x, y) + \text{int} C$ la distanza tra le frontiere di $\alpha - C$ e $f_2(x, y) - C$ è maggiore di 0, si

ha:

(4.6) se $\alpha \in f_2(x, y) + \text{int} C$ allora

$$f_2(x_{n_k}, y_k) \in \alpha - C \text{ definitivamente.}$$

Inoltre dalla forte C-s.c.i. di f_2 si ha:

$$\liminf_c f_2(x_{n_k}, \hat{y}(x_{n_k})) \geq_* f_2(x, \bar{y})$$

e quindi esiste una estratta da $f_2(x_{n_k}, \hat{y}(x_{n_k}))$,

indicata ancora con $f_2(x_{n_k}, \hat{y}(x_{n_k}))$, che converge a un punto di $f_2(x, \bar{y}) + C$ oppure diverge positivamente rispetto al punto $f_2(x, \bar{y})$.

Ragionando in maniera analoga a quanto fatto prima per ottenere la (4.6) si ha:

(4.7) se $\beta \in f_2(x, \bar{y}) - \text{int} C$ allora

$$f_2(x_{n_k}, \hat{y}(x_{n_k})) \in \beta + C \text{ definitivamente.}$$

Da (4.6) e (4.7), poichè $f_2(x, \hat{y}(x)) \leq_c f_2(x, z)$ per ogni $z \in Y$, si deduce che per ogni $\alpha \in f_2(x, y) + \text{int} C$ e per ogni $\beta \in f_2(x, \bar{y}) - \text{int} C$ la successione $f_2(x_{n_k}, \hat{y}(x_{n_k}))$ è

contenuta definitivamente in $(\alpha - C) \cap (\beta + C)$. Allora per ogni $\alpha \in f_2(x, y) + \text{int} C$ e per ogni $\beta \in f_2(x, \bar{y}) - \text{int} C$ risulta $(\alpha - C) \cap (\beta + C) \neq \emptyset$. Prese due successioni $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rispettivamente convergenti a $f_2(x, y)$ ed a $f_2(x, \bar{y})$ e tali che $\alpha_n \in f_2(x, y) + \text{int} C$, $\beta_n \in f_2(x, \bar{y}) - \text{int} C$, si ha quindi $(\alpha_n - C) \cap (\beta_n + C) \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $d_n \in (\alpha_n - C) \cap (\beta_n + C)$ e quindi esistono due successioni $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenute in

C e tali che $d_n = \alpha_n - c_n = \beta_n + e_n$ da cui $\alpha_n = \beta_n + c_n + e_n$. Così si ha $\beta_n \leq \alpha_n$ e dalla proposizione 3.1 segue adesso (4.5). Da ciò segue $\bar{y} = \hat{y}(x)$ e quindi la successione $(\hat{y}(x_{n_k}))$ converge a $\hat{y}(x)$. Dal fatto che Y è compatto e che ogni estratta, da $(\hat{y}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, che sia convergente tende a $\hat{y}(x)$ segue che la successione $(\hat{y}(x_n))$ converge a $\hat{y}(x)$. Da ciò e dalla C-s.c.i. di f_1 segue che anche la funzione $g: x \in X \rightarrow f_1(x, \hat{y}(x)) \in \mathbb{R}^n$ risulta C-s.c.i. Poichè una funzione C-s.c.i. su un compatto ammette elementi minimali ([5]) si ha la tesi.

Osservazione 4.1

Se nella proposizione 4.1 si pone $n=1$ e $C=[0, +\infty[$ si ottiene la proposizione 2.1 ([20] corollario 5.1).

Esempio 4.1

In questo esempio è presentata una funzione non continua soddisfacente le ipotesi su f_2 della proposizione 4.1.

Siano $C=[0; +\infty[\times [0, +\infty[\subseteq \mathbb{R}^2$, $X=Y=[0; 2]$, f la funzione definita in $X \times Y$ (ed a valori in $\mathbb{R}^2$) ponendo:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+3y, x+5y) & \text{se } (x, y) \in X \times Y - \{(1; 1)\} \\ (3; 5) & \text{se } (x, y) = (1; 1) \end{cases}$$

E' immediato verificare che $R_f(x) = \{0\}$ per ogni $x \in X$. Inoltre f non è continua nel punto $(1; 1)$ in quanto:

$\lim_{(x, y) \rightarrow (1; 1)} f(x, y) = (4; 6) \neq (3; 5) = f(1; 1)$. Evidentemente nei punti di $X \times Y - \{(1; 1)\}$ la f , essendo continua, è ivi fortemente C-s.c.i. e verifica la (4.3) della proposizione 4.1. Sia ora

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente a 1. Si consideri la successione $y_n \equiv 0$. Si ha: $f(x_n, y_n) = f(x_n, 0) = (x_n, x_n)$ da cui segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = (1; 1) <_C (3; 5) = f(1; 1)$ e cosí la (4.3) risulta completamente verificata.

Si consideri adesso una successione (x_n, y_n) convergente a $(1; 1)$ e siano $A = \{(1; 1)\}$ e $B = \mathbb{R}^2 - \{(1; 1)\}$. Se (x_n, y_n) è definitivamente contenuta in A si ha che $f(x_n, y_n) = f(1; 1)$ definitivamente e quindi $f(x_n, y_n)$ converge proprio a $f(1; 1)$ da cui segue $f(1; 1) \leq_* \text{Lim inf}_C f(x_n, y_n)$. Se invece (x_n, y_n) è contenuta in B definitivamente si ha:

$f(x_n, y_n) = (x_n + 3y_n, x_n + 5y_n)$ da cui si deduce che $f(x_n, y_n)$ converge a $(4; 6)$; ma $(4; 6) >_C (3; 5) = f(1; 1)$ e cosí si ottiene di nuovo $f(1; 1) \leq_* \text{Lim inf}_C f(x_n, y_n)$. Se la successione (x_n, y_n) non è definitivamente contenuta nè in A, nè in B, allora $(f(x_n, y_n))$ non converge e non diverge, ogni sua estratta non diverge e ogni sua estratta convergente è definitivamente contenuta in A oppure in B e cosí si ha di nuovo:

$f(1; 1) \leq_* \text{Lim inf}_C f(x_n, y_n)$. In tal modo la forte C-s.c.i. di f risulta completamente provata.

Osservazione 4.2

Il teorema 4.1 può essere applicato ad un particolare problema di Pareto nel seguente modo.

Siano $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ spazi topologici compatti di Hausdorff e verificanti il primo assioma di numerabilità, $X = \prod_{i=1}^n X_i, Y = \prod_{j=1}^m Y_j, f_i: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ per $i=1, \dots, n, g_j: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ per $j=1, \dots, m$. Siano, inoltre, $C = [0, +\infty[^n, D = [0, +\infty[^m, f$ la funzione definita

in $X \times Y$ e a valori in $\mathbb{R}^n$ avente per componenti le funzioni $f_1, \dots, f_n$ e g la funzione definita in $X \times Y$ e a valori in $\mathbb{R}^m$ avente per componenti le funzioni $g_1, \dots, g_m$.

Dalla proposizione 4.1 segue subito che nelle ipotesi:

(4.8) f è C-s.c.i.;

(4.9) g è fortemente D-s.c.i.;

(4.10) per ogni $x \in X$, per ogni $y \in Y$, per ogni successione

(x_k) convergente a x esiste una successione (y_k) contenuta in Y tale che: $\limsup_{k \rightarrow \infty} g(x_k, y_k) \leq g(x, y)$;

(4.11) per ogni $x \in X$, per ogni $j \in \{1, \dots, m\}$ esiste ed è unico

$\tilde{y}_j(x) \in Y_j$ tale che per ogni $y_j \in Y_j$ risulti:

$$g_j(x, \hat{y}_j) \leq g_j(x, y_j);$$

allora esiste $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ tale che non esiste $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$

per il quale risulti:

$$f(x, \tilde{y}(x)) <_c f(\bar{x}, y(\bar{x})).$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A.Bagchi "Stackelberg differential games in economic models", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 64(1984).
- [2] T.Basar, G.J.Olsder "Dynamic noncooperative game theory" Academic Press, New York (1982).
- [3] M.Breton, A.Alj, A.Haurie "Sequential Stackelberg equilibria in two-person games", Journal of optimization theory and applications, Vol.59, pp.71-97 (1988).
- [4] C.Chen, J.B.Cruz "Stackelberg solution for two-person games with basied information patterns" IEEE Transaction on Automatic Control, vol.AC.17(1972).
- [5] H.W.Corley "An existence result for maximization with respect to cones" Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.31, No.2, pp.277-281 (1980).
- [6] F.Ferro " A minimax theorem for vector-valued function" Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.60, No.1, pp.19-31 (1989).
- [7] F.Ferro "A minimax theorem for vector valued functions, Part 2", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.68, No.1, pp.35-48 (1991).
- [8] K.Kuratowski "Topology" Academic Press, New York (1966).
- [9] M.Lassonde, C.Schenkel "KKM Principle, fixed points, and Nash equilibria", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.164, No.2, pp.542-548 (1992).
- [10] G.Leitmann " On generalized Stackelberg strategies" Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.26,

No.6 (1978).

[11] M.B.Lignola, J.Morgan " Topological existence and stability for Stackelberg problems " Preprint No.47, Pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli (1991), to appear on Journal of Optimization Theory and Applications.

[12] M.B.Lignola, J.Morgan "Regularized bilevel programming problem", Preprint No.22, Pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli (1993)

[13] P.Loridan,J.Morgan "A theoretical approximation scheme for Stackelberg problems" Journal of optimization theory and application, Vol.61,n.1,pp.95-110 (1989).

[14] P.Loridan,J.Morgan"Approximate solutions for two-level optimization problems, in K.Hoffmann, J.Hiriart-Urruty, C.Lemarechal, J.Zower (eds.) : Trends in Mathematical Optimization, International Series of Numerical Mathematics 84, Birkhauser Verlag, pp.181-196 (1988).

[15] P.Loridan, J.Morgan " ϵ -regularized two-level optimization problems: approximation and existence results " Lecture Notes in Math. No.1405, Springer Verlag (1989).

[16] P.Loridan, J.Morgan " New results on approximate solutions in two-level optimization "Optimization, 20 (1989)

[17] P.Loridan, J.Morgan " On strict ϵ -solutions for a two-level optimization problem" Proceeding of the international conference on operarion research 90 in Vienna, edited by G.Feichtinger, W.Bulher, F.J.Radermacher and P.Stahly, Springer Verlag, Berlin, Germany, pp.165-172, (1992).

- [18] L.Mallozzi,J.Morgan, " ϵ -mixed strategies for static continuous Stackelberg problem", Journal of Optimization Theory and Application, Vol.28, No.2 (1993).
- [19] L.Mallozzi,J.Morgan, "Weak Stackelberg problem and mixed solutions under data perturbations", Preprint n.11, Pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli, (1993).
- [20] J.Morgan "Constrained well-posed two-level optimization problems" International Sciences Series, Vol.43, edited by F.H.Clarke, V.H.Dem'yanov and F.Giannesi, Plenum Press, New York and London (1989) pp.307-325.
- [21] R.Raucci "Limiti inferiore e superiore per successioni vettoriali e relative semicontinuità per funzioni vettoriali ", Preprint n.3, Pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli (1993).
- [22] M.Simaan, J.B.Cruz "On the Stackelberg strategy in nonzerosum games " Journal of Optimization Theory and Applications, 11 (1973) pp.533-555.
- [23] H.Von Stackelberg " The theory of market economy" Oxford University Press, Oxford (1952).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli "Federico II", Complesso Monte S.Angelo, Via Cinthia 80126 Napoli.

LA SECCA DELLE FORMICHE DI VIVARA (CANALE D'ISCHIA, CAMPANIA) OSSERVAZIONI GEOMORFOLOGICO-STRUTTURALI E FAUNISTICHE

Nota di Luigi Ferranti, Sergio Bravi e Giovanni de Alteriis
Presentata dal Socio Bruno D'Argenio

Adunanza del 5 marzo 1994

Riassunto

Il rilevamento subacqueo di un settore della Secca delle Formiche di Vivara (Canale d'Ischia) ha consentito di fornire un contributo alle conoscenze sull'evoluzione vulcanologica e morfogenetica di quest'area in relazione agli eventi eustatici occorsi negli ultimi 100.000 anni. La Secca delle Formiche di Vivara rappresenta la morfologia relitta di un centro eruttivo monogenico di tipo *tuff cone* o *tuff ring* ialoclastitico a composizione latite-basaltica, impostatosi su un substrato trachitico formatosi in ambiente subaereo. Evidenze di fasi deformative posteriori alla formazione del vulcano sono rappresentate sistemi di *joints* orientati prevalentemente E-W. Su tali linee di debolezza si è impostata, nel corso della successiva discesa del livello marino precedente l'ultimo glaciale (*stage 2* della curva isotopica dell'ossigeno), l'azione morfogenetica che ha scolpito cavità di abrasione costiere, correlate a falesie e terrazzi marini disposti ad una o più quote di riferimento (-16 m; -24 m). In una di queste cavità, qui detta "Grotta Grande delle Formiche", è stata rilevata la presenza di una breccia vulcanica costituita in massima parte da xenoliti lavici, sottostante i tufi che costituiscono il cono ialoclastitico. Lo studio del sedimento presente sul fondo della grotta, costituito prevalentemente da sabbie bioclastiche a Foraminiferi bentonici non autoctoni, ha inoltre messo in luce un elevato grado di idrodinamismo della cavità.

Abstract

An underwater survey by means of SCUBA-diving equipment has been carried out at the "Secca delle Formiche di Vivara" (Formiche di Vivara shoal) in the "Canale d'Ischia" (Ischia sound), offshore Naples (Southern Italy). This research aims at contributing to the knowledge of the volcanological and morphogenetical evolution of this sector of Phlaegrean Islands. The Formiche shoal represents the remnant of a submarine volcano formed through subaqueous explosive eruptions of a latitebasaltic-latitic magma which produced hyaloclastitic tuffs. The submarine survey has revealed the presence of submerged cave systems and coastal cliffs; in one of this caves, here named "Grotta

Grande delle Formiche", stratigraphic and faunal observations were carried out; a so far unknown volcanic breccia with trachytic xenoliths has been recognized underneath the hyaloclastite. This evidence allows to better constrain the volcanological evolution of the area. The volcanic edifice has been fractured along mostly E-W trending systems of joints related to the local stress field. Geomorphological evidence are related mostly to the eustatic oscillations during the late Pleistocene-Holocene; the contribution of the ground motion (bradyseism) to sea-level fluctuations being assumed of minor extent. During the pre-stage 2 sea-level fall (> 18 Ka), multiple and long-lasting sea-level stands formed abrasion surfaces at -16/18 m and possibly at -24 m below present sea level, and cave systems developed along the coastal cliff. The benthic foraminifera associations found in the sediments sampled from the cave floor result quite allochthonous with respect to the cavity habitat and denote an highly energetic hydrodynamic regime.

INQUADRAMENTO GEOLOGICO E PRECEDENTI CONOSCENZE SUL CANALE D' ISCHIA

L' attività vulcanica nelle isole di Ischia e Procida e nell'area dei Campi Flegrei si è manifestata, nella quasi totalità, con eruzioni a carattere esplosivo prodotte da apparati monogenici dal Pleistocene Superiore all'attuale (Pescatore e Rolandi, 1981; Vezzoli, 1988). Il chimismo dei magmi da sottosaturi a saturi di stirpe alcalino-potassica e le modalità eruttive, principalmente di tipo esplosivo freatomagmatico, hanno condotto, nella maggior parte dei casi, alla formazione di rocce piroclastiche, e solo subordinatamente di ammassi o cupole laviche (Di Girolamo et al., 1984). I tipi petrografici più diffusi sono alcalitraciti, latiti e basalti alcalini di serie potassica.

Le conoscenze geologiche sulla regione sono contenute in una vastissima letteratura che risale agli inizi della moderna vulcanologia e dedicata quasi esclusivamente allo studio dei vulcani emersi insulari o continentali. Per una rassegna aggiornata si rimanda ad alcuni lavori di sintesi pubblicati recentemente (ad esempio Monografie CNR "*Island of Ischia*" e "*Phlegrean Fields*", Roma 1987-1988 e numero speciale del *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 48, 1991). Minore attenzione è stata storicamente dedicata alla ricerca di apparati vulcanici sommersi o sepolti dai sedimenti, presenti nel tratto di piattaforma continentale antistante le coste campane (Latmiral et al., 1971).

La zona del Canale di Ischia, oggetto di questa nota, costituisce una sella morfologica tra la piattaforma continentale del Golfo di Gaeta a NW e del Golfo di Napoli a SE. Nella stretta del canale, che separa l'isoletta di Vivara (Procida) dal Castello d'Ischia (Ischia), largo appena 1.2 miglia marine, il fondale non supera i 30 m di profondità (Fig. 1). La distribuzione a scala più regionale del vulcanismo sull'asse NE-SW Ischia-Procida ha avuto sicuramente un controllo strutturale (Di Girolamo et al., 1984; Vezzoli, 1988). Anche nel Canale di Ischia e nelle aree ad esso prospicienti sia l'andamento della topografia marina che la distribuzione dei centri eruttivi sommersi e affioranti sembrano aderire allo stesso

trend regionale. In particolare è da ritenere che un ruolo primario nella zona del canale sia stato svolto dal sistema di faglie dirette NE-SW che, nell'isola d'Ischia, separano la parte sud-orientale (Scarrupata di Barano) dalla depressione centro orientale (Graben di Ischia) dove è localizzata la maggior parte dell'attività più recente (successiva al Tufo Verde d'Ischia, cioè post- 55 Ka). La quasi totalità delle vulcaniti affioranti a Ischia è costituita da lave, duomi lavici, scorie e piroclastiti a chimismo prevalentemente alcali-trachitico con rare eccezioni a composizione latitica e trachibasaltica (Vezzoli, 1988).

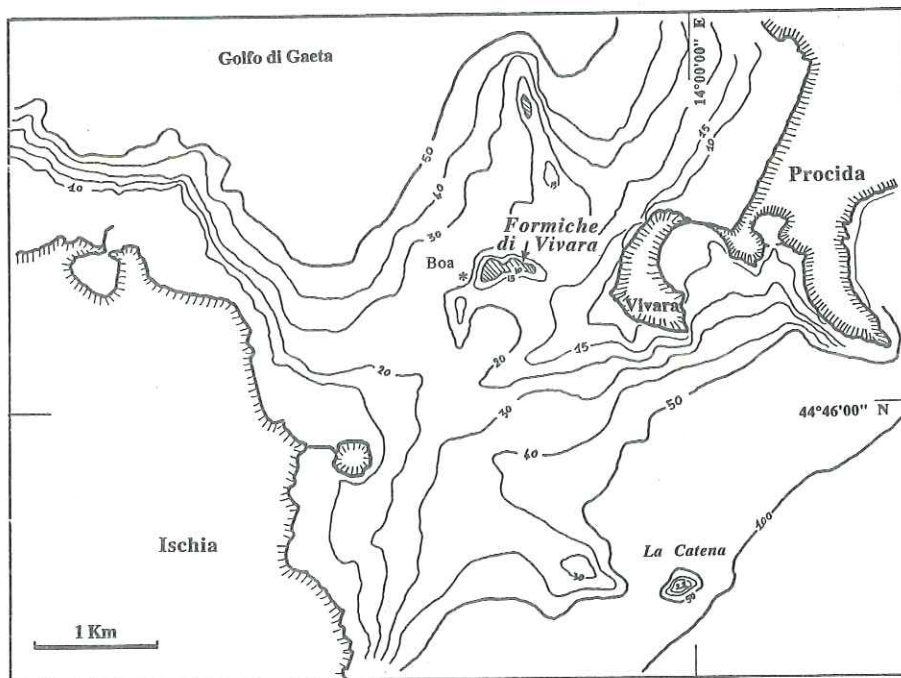


Figura 1

Batimetria del Canale d'Ischia e ubicazione della Secca delle Formiche di Vivara (contour realizzato da Carta nautica 1: 25.000 dell'Istituto Idrografico della Marina e da Di Girolamo e Rolandi, 1975). Profondità in metri; sono tratteggiate le zone con profondità inferiore ai 10 m.

A NE del canale, il sistema di faglie NE-SW decorre all'interno dell'Isola di Procida ed è stato evidenziato da prospezioni gravimetriche (Imbò et. al., 1964). A tale sistema è associato probabilmente il vulcanismo procidano i cui prodotti in affioramento sono datati nell'intervallo 42-17 Ka (Lirer et al., 1991). Le rocce affioranti in quest'isola sono

costituite da tufi litoidi ialoclastitici a composizione trachibasaltica originati da eruzioni freatomagmatiche (Di Girolamo et al., 1984). Il chimismo è rappresentato anche qui da prodotti della serie alcalino-potassica (trachibasalti olivinici, trachandesiti, latiti, fonoliti e trachiti alcaline) (Di Girolamo e Stanzione, 1973). L'isoletta di Vivara, in particolare, costituisce un esempio di apparato vulcanico monogenico di tipo *tuff cone* impostatosi in ambiente sottomarino a debole profondità nel quale le dinamiche eruttive sono principalmente governate dall' interazione magma-acqua marina. L'età del vulcano di Vivara, ottenuta mediante datazione C14 di un paleosuolo a tetto del tufo ialoclastitico che costituisce il *tuff cone* è superiore a 40 Ka (Lirer et al., 1991; Rolandi, dati non pubblicati).

Nella zona del canale di Ischia già Rittmann, nella sua fondamentale monografia sulla maggiore isola flegrea (Rittmann, 1930), aveva ipotizzato la presenza di due edifici vulcanici in corrispondenza delle secche delle "Formiche di Vivara" e della "Catena".

Successivamente Di Girolamo e Rolandi (1975) studiano in dettaglio le due secche e, sulla base di campionamenti e profili ecografici, le associano a resti di vulcani sottomarini a chimismo latitebasaltico-latitico.

OSSERVAZIONI GEOLOGICHE E MORFOSTRUTTURALI SULLA SECCA DELLE FORMICHE

La secca delle Formiche è situata nel Canale d'Ischia a poco meno di 1 km ad Ovest dell'Isola di Vivara (40°44'40"N e 13°58'50" E) ed a circa 250 m a NE di una boa di navigazione. La secca, di forma leggermente arcuata ed allungata E-W per circa 800 m, ha la base a circa 20 m e cappello a 6-8 m (con punte fino a 4 m) di profondità (Fig. 1). Il lato orientale rivolto verso l'isola di Vivara si presenta meno ripido e termina in una spianata a -16 m di profondità, ricoperta di sabbie più o meno grossolane, a forte contenuto bioclastico. Il lato occidentale, rivolto verso l'isola d'Ischia appare più ripido e presenta un maggior dislivello batimetrico.

Il rilevamento subacqueo da noi condotto sia all'esterno della secca che all'interno di una delle grotte che in essa si rinvencono (qui detta "Grotta Grande delle Formiche") ha permesso di fornire un ulteriore contributo alle conoscenze vulcanologiche e geomorfologiche dell'area.

La parte superiore della secca è costituita da un banco di lava di oltre 7 m di spessore, che si segue per 400 m di lunghezza e circa 200 di larghezza; la lava ha una composizione latitebasaltica-latitica ed è di origine subaerea mancando le tipiche strutture a *pillow* caratteristiche di ambiente sottomarino (Di Girolamo e Rolandi, 1975). La parte inferiore è costituita da un tufo giallo ialoclastitico a composizione analoga a quella della lava, per circa

15 m di spessore visibile. Questa formazione immerge sotto i sedimenti attuali ed i caratteri morfologici e giacitureli suggeriscono che prosegue in profondità.

La Secca delle Formiche rappresenta il relitto di un edificio vulcanico generatosi prevalentemente in ambiente sottomarino ed appartenente al complesso vulcanico ialoclastitico Vivara-Formiche di Vivara (Di Girolamo e Rolandi, 1975). La morfologia relitta dell'apparato vulcanico é quella di un *tuff ring* o *tuff cone* smembrato sul fianco S/SW. Questo smembramento può essere attribuito ad erosione marina o ad una propagazione del centro eruttivo verso S/SW (Di Girolamo e Rolandi, 1975) o ad una asimmetria primaria nel contesto di un singolo evento eruttivo. Il vulcano è posto sul sistema regionale di faglie ad andamento NE-SW individuato tra la parte meridionale d'Ischia e l'isola di Procida (Di Girolamo e Stanzione, 1973; Di Girolamo e Rolandi, 1975). Dopo la genesi sottomarina del cratere ialoclastitico, si ebbe emersione con effusione delle lave latitebasaltico-latitiche subaeree che si rinvennero presso la boa.

La serie stratigrafica da noi osservata nella Grotta Grande delle Formiche, è schematicamente composta da due unità che sono, dal basso verso l'alto:

1) una breccia eterogenea, scoriacea verso il basso, con inclusi di lava trachitica e di ignimbriti saldate di dimensioni fino a 40-50 cm, con spessore visibile per circa 4-5 m;

2) tufi giallastri ialoclastitici, in strati regolari di 10-20 cm di spessore, con laminazione piano-parallela depositisi, con contatto molto netto, al di sopra della breccia con spessore accertato di 3 m.

La formazione del tufo giallo ialoclastitico quindi presenta verso il basso un intervallo breccioso-scoriaceo finora non conosciuto. Il grado di alterazione di tale deposito non consente allo stato attuale una precisa caratterizzazione petrografica; inoltre la mancanza di uno *hiatus* ben chiaro tra breccia e ialoclastiti non permette di stabilire con sicurezza se la breccia da noi rilevata sia un intervallo basale delle ialoclastiti oppure il prodotto di attività più antica. Le caratteristiche vulcanologiche della breccia e la presenza di inclusi di lava a composizione trachitica (Rolandi, comm. pers.) fanno comunque ipotizzare l'esistenza di un ambiente subaereo successivamente trapanato dall'eruzione subacquea delle ialoclastiti. Inclusi trachitici di ambiente subaereo sono anche segnalati nelle ialoclastiti della Secca de La Catena (Di Girolamo e Rolandi, 1975).

La breccia da noi osservata e campionata alla Grotta Grande delle Formiche presenta forti analogie litologiche con depositi simili presenti nella zona del Canale di Procida (Di Girolamo et al., 1984), ed in particolare con le brecce affioranti a P.ta della Lingua (Procida) e sul versante occidentale di Vivara. A Procida queste brecce si trovano sistematicamente al di sotto alla formazione di Solchiaro e la loro età è stata recentemente determinata in circa 20.000 anni (Lirer et al., 1991).

In alternativa a tale interpretazione si potrebbe correlare la breccia delle Formiche con la porzione basale della successione descritta da Rosi et al. (1988) a Punta dell'Alaca (Vivara). Questa successione presenta, al di sopra dei prodotti costituenti il vulcano di Vivara, una breccia esplosiva di 3/4 m di spessore seguita da tufi ialoclastitici attribuiti a un centro eruttivo localizzato nel Canale d'Ischia (Rosi et al., 1988).

Il rilevamento strutturale sommerso ha messo in luce l'esistenza di sistemi di *joints* a direzione compresa tra E-W e subordinatamente NE-SW. L'intero cappello della secca si presenta segmentato in una serie di gradini separati da rialzi di 1-2 m, dovuti all'azione erosiva sui sistemi di *joints*. I sistemi di *joints* non costituiscono il prodotto di fessurazione da raffreddamento, poiché non sono stati osservati prismi esagonali di fratturazione, bensì rappresentano l'effetto di un campo di sforzi successivo alla messa in posto dei tufi ialoclastitici.

LE CAVITA' SOMMERSE: DESCRIZIONE ED ASPETTI SPELEOGENETICI

La Secca delle Formiche è caratterizzata dalla presenza di diverse cavità sommerse, di dimensioni variabili (Bravi et al., in stampa). La grotta da noi investigata in maggior dettaglio, qui denominata "Grotta Grande delle Formiche", è ubicata sul lato orientale della Secca (Fig. 1).

Tale cavità (Fig. 2) è costituita da una serie di tronconi che formano un sistema di circa 50 m di sviluppo, compreso tra le profondità di -6 e -16 m, che trafora la secca da un lato all'altro. L'ingresso principale, alto 5 m, si apre nelle ialoclastiti ed ha morfologia a V rovescia; esso immette in un primo troncone, orientato E-W e costituito da una galleria di circa 25 m di sviluppo. Questa è scavata nelle breccie stratificate ed il fondo è coperto di sedimento (sabbie, ciottoli e blocchi di crollo arrotondati dall'abrasione). All'estremità di questo troncone si rinviene una cameretta aperta verso l'alto a formare un pozzetto, che sbuca sul cappello della secca a -7 m di profondità. Da tale cameretta diparte un secondo troncone, più stretto ed orientato NE-SW. Un ultimo troncone, costituito da uno stretto cunicolo orientato NW-SE, immette in una saletta circolare detta "Sala della Fenestella", sviluppata in scorie stratificate debolmente saldate. Sul lato volto a N un breve ingresso mette la saletta in comunicazione con l'esterno. Le altre cavità presenti in questo settore della Secca, benchè di minor sviluppo, mostrano analoghe caratteristiche morfologiche (Bravi et al., in stampa). Gallerie strette e lunghe, sovente col tetto sfondato, piccoli cunicoli, un arco naturale. Esse si aprono quasi sempre al piede della falesia sommersa della secca, a profondità comprese tra i -14 e i -18 m. Si fa notare che a tale intervallo di

profondità, ricorrente per i vari sistemi di cavità, corrisponde la spianata (-16 m) circostante la secca sul lato orientale.

Le morfologie osservate in tali cavità suggeriscono una genesi in ambiente costiero con erosione e crolli in zona di risacca. Gallerie a V rovescia e sale a campana rappresentano il prodotto dell'abrasione, a livello del mare, su sistemi di faglie e fratture. Il cunicolo del secondo troncone ricorda morfologie di erosione "a piena sezione" caratteristiche di contesti speleogenetici freatici che sono comunque incompatibili con il litotipo coinvolto. Una forma di erosione da crollo in ambiente subaereo è presumibilmente costituita dal pozzetto centrale. I prodotti di crollo non si rinvergono alla base del pozzetto. L'energia in grado di realizzare un rapido smaltimento dei prodotti può essere associata all'azione marina a livello costiero. A tale azione erosiva si può attribuire anche la genesi dell'arco naturale, che si rinviene poche decine di metri a W della grotta in oggetto.

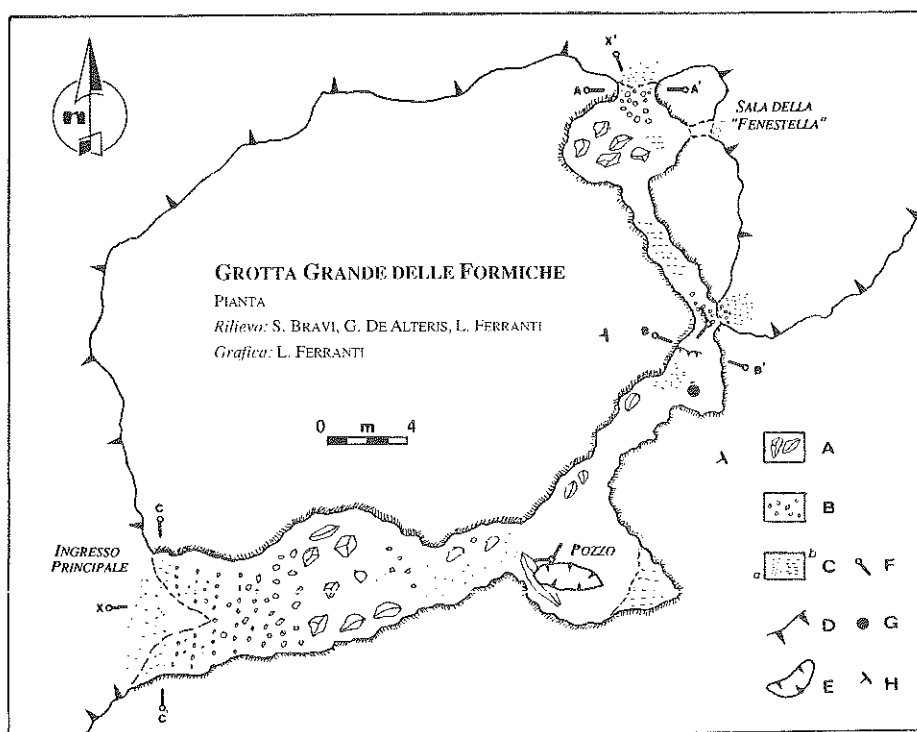


Figura 2

Pianta della Grotta Grande delle Formiche. Legenda: A) blocchi di crollo; B) ciottoli e blocchi arrotondati; C) sabbia (X) e sabbia limosa (Y); D) piede di scarpata sommersa; E) pozzo; F) traccia delle sezioni di Fig. 3; G) punto di campionamento sabbie per analisi della tanatocenosi; H) giacitura strati.

In definitiva, la maggior parte della speleogenesi ha avuto luogo lungo la direzione prevalente dei sistemi di *joints* orientati E-W. Subordinatamente essa è stata controllata dalla giacitura stratigrafica e/o da lineamenti tettonici regionali (NNE-SSW), connessi alla formazione dell'edificio vulcanico, ma eventualmente non più attivi in epoca successiva. Questa osservazione documenta la presenza di un notevole grado di fratturazione successivo alla formazione dei prodotti vulcano-clastici affioranti alla Secca delle Formiche.

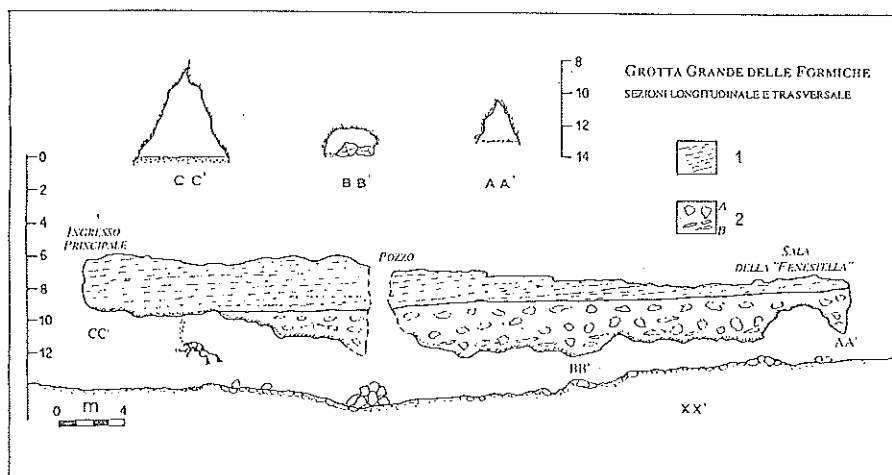


Figura 3

Sezioni della Grotta Grande delle Formiche. La sezione longitudinale riporta i caratteri stratigrafici rilevati. Legenda: 1) tufi ialoclastitici; 2a) breccia; 2b) breccia scoriacea.

OSSERVAZIONI SULL'ASSOCIAZIONE A FORAMINIFERI BENTONICI

Sono state condotte le prime osservazioni sull'associazione a foraminiferi bentonici presente al fondo della Grotta Grande delle Formiche.

Un campione di sedimento è stato prelevato alla profondità di -15 m, nella posizione indicata in figura 2, all'interno del cunicolo che mette in comunicazione la camera del

pozzetto e una sfondatura laterale a NE. Questo sedimento é costituito da sabbie grossolane a forte componente organogena, essendovi molto abbondanti i Gasteropodi, sovente negli stadi iuvenili, i radioli di Echinidi, i Briozoi e le piastre di Balani. Più rari risultano i bivalvi, i Brachiopodi ed i Foraminiferi.

Per le osservazioni sui Foraminiferi bentonici sono stati esaminati complessivamente 60 g di sedimento, dal quale é stata prelevata la totalità degli esemplari.

L'associazione, dominata dai generi Quinqueloculina, Peneroplis, Cibicides, Elphidium e Rosalina, é risultata costituita nel complesso dalle seguenti 27 specie:

TEXTULARIIDAE:

- 1) *Textularia conica* d'Orbigny, 1839
- 2) *Textularia calva* Lalicker, 1935
- 3) *Textularia sp.*

NUBECULARIIDAE:

- 4) *Verterbralina striata* d'Orbigny, 1826

MILIOLIDAE:

- 5) *Quinqueloculina vulgaris* d'Orbigny, 1826
- 6) *Quinqueloculina disparilis* d'Orbigny, 1839
- 7) *Quinqueloculina variolata* d'Orbigny, 1878
- 8) *Quinqueloculina berthelotiana*, d'Orbigny, 1839
- 9) *Quinqueloculina bosciana* d'Orbigny, 1839
- 10) *Triloculina oblonga* (Montagu, 1803)
- 11) *Adelosina italica* (Terquem, 1878)

SORITIDAE

- 12) *Peneroplis planatus* (Fichtel & Moll, 1798)
- 13) *Peneroplis pertusus* (Forskal, 1775)
- 14) *Spirolina arietina* (Batsch, ..)

DISCORBIDAE

- 15) *Rosalina bradyi* (Cushman, 1915)
- 16) *Rosalina obtusa* d'Orbigny, 1846

ASTERIGERINIDAE

- 17) *Asterigerinata mamilla* (Williamson, 1858)

ROTALIIDAE

- 18) *Ammonia gaimardi* (d'Orbigny, 1906)

ELPHIDIIDAE

- 19) *Elphidium crispum* (Linneo, 1758)
20) *Elphidium pauciloculum* (Cushman, 1944)
21) *Elphidium cuvillieri* Lévy, 1966

EPONIDIDAE

- 22) *Eponides repandus* (Fichtel & Moll)

CIBICIDIDAE

- 23) *Cibicides lobatulus* (Walker & Jacob, 1798)
24) *Cibicidella variabilis* (d'Orbigny, 1826)
25) *Cyclocibicides vermiculatus* (d'Orbigny, 1826)

PLANORBULINIDAE

- 26) *Planorbulina mediterraneensis* d'Orbigny, 1826

HOMOTREMATIDAE

- 27) *Miniacina miniacea* (Pallas, 1766)

Una cospicua parte delle specie riportate risulta caratteristica di fondali con vegetazione, in particolare con posidonieto. Nel complesso, l'associazione riscontrata è tipica del piano infralittorale, con l'eccezione di *Eponides repandus*, specie circalittorale caratteristica dei fondi detritici e, nel Golfo di Napoli, di aree interessate da correnti (es. Canale di Procida, Canale d'Ischia, Sgarrella & Moncharmont, 1993). Unico elemento probabilmente in buona parte autoctono è *Miniacina miniacea*, forma sciafila che colonizza i rizomi di *Posidonia* e che si rinviene abbondante nelle grotte. I suddetti caratteri dell'associazione a Foraminiferi bentonici, nonché la granulometria grossolana del sedimento, testimoniano un notevole idrodinamismo, almeno nelle aree meno protette della cavità in oggetto, responsabile dell'accumulo nel suo interno di sedimenti provenienti dai circostanti fondali con vegetazione marina.

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI

La Secca delle Formiche costituisce la morfologia relitta di un antico centro eruttivo probabilmente di tipo *tuff cone* o *tuff ring* ialoclastitico. Questa interpretazione, suggerita dall'andamento semicircolare delle isobate (Fig. 1), sembra confermata anche dai rilievi subacquei da noi condotti.

Allo stato delle conoscenze è alquanto problematico collocare la serie da noi rilevata e campionata alla Grotta Grande delle Formiche nel contesto stratigrafico delle isole di Procida e Vivara. A ciò si aggiunga il fatto che anche sulla definizione di tale contesto esistono interpretazioni spesso discordanti (Lirer et al., 1991; Rosi et al., 1988). Nell'ipotesi che sia valida la correlazione tra la serie da noi riconosciuta sott'acqua con una serie analoga descritta da Rosi et al. sull'affioramento di P.ta Alaca (Vivara) (Rosi et al., 1988) a sua volta sottoposta a una breccia di età 20 Ka (Lirer et al., 1991) ne consegue che i depositi del vulcano delle Formiche sono più antichi di 20.000 anni e, probabilmente, successivi a quelli di Vivara (Di Girolamo e Rolandi, 1975). La morfologia primaria dell'edificio è stata modificata dalla successiva azione morfogenetica marina legata a variazioni relative del livello del mare. Gli indizi di tali variazioni sono soprattutto di natura sedimentologica e morfologica.

Nel primo caso infatti si osserva che la granulometria dei sedimenti cresce verso l'interno della Grotta Grande delle Formiche, passando da sabbie a blocchi ben arrotondati. Essi rappresentano dunque sedimenti-relitto che indicano episodi di crollo e di rimaneggiamento seguiti da un rapido annegamento della grotta. Sotto l'aspetto morfologico si rinvencono sia indicatori generici di emersione che più precisi indizi di linee di riva. Nella prima categoria sono compresi i sistemi di cavità alla base della secca la cui origine è da attribuirsi unicamente all'abrasione costiera. Alla seconda categoria appartengono i ripiani posti sui due bordi esterni della secca, ad una profondità di circa -16 m sul lato orientale e circa -22/-24 m su quello occidentale; tali ripiani, che vengono interpretati come terrazzi marini con copertura detritica recente, sono associati alle falesie sommerse che bordano la secca e che hanno risagomato la morfologia primaria dell'edificio vulcanico. Il cappello stesso della secca, posto a -6/-8 m, benchè articolato in ripiani e gradini per successivi fenomeni erosivi, potrebbe rappresentare un terrazzo; ciò è comprovato dalla leggera discordanza angolare tra la superficie del cappello e la stratificazione, che nel settore indagato immerge di pochi gradi verso W (Fig. 3). La testimonianza più evidente di antichi livelli costieri attualmente sommersi è rappresentata dalle morfologie osservate nelle grotte. In particolare la presenza di un arco (Grotta dell'Arco Naturale, Bravi et al., in stampa) e di sezioni campaniformi o a V rovescia, suggerisce una stasi del livello marino per un intervallo temporale anche abbastanza

prolungato. La profondità di questo paleolivello può essere indicativamente riferita al fondo della Grotta Grande delle Formiche (mediamente -16 m), molto prossima a quella del piede dell'arco nella limitrofa Grotta dell'Arco Naturale (-18). Questa profondità è all'incirca corrispondente anche al ripiano che separa il bordo orientale della secca dall'isola di Vivara.

Anche in altri settori del Canale d'Ischia sono documentate evidenze di oscillazioni del livello marino. Sul Banco d'Ischia, posto nel settore SW del canale, è riportata la presenza di una paleosuperficie, rappresentata dal cappello della secca, ad una profondità di -27/30 m, che passa al margine del banco ad una spiaggia sommersa (Latmiral et al. 1971). Secondo gli Autori, l'incisione della paleosuperficie di abrasione marina e la formazione di spiagge ai suoi margini, sarebbero il prodotto dello spianamento di un edificio vulcanico, precedentemente emerso, durante un episodio trasgressivo non meglio identificato cronologicamente e connesso alla progressiva subsidenza di questo settore del canale. Infine i rilievi batimetrici indicano la presenza diffusa nel canale di superfici di erosione, terrazzi e secche ad una profondità di -22/28 m.

La difficoltà più grossa nell'inquadrare cronologicamente questi antichi livelli marini è rappresentata dalla interferenza tra eustatismo e movimenti vulcano-tettonici verticali, che hanno largamente interessato la regione. E' ben noto che l'oscillazione del suolo relativamente al livello marino nell'area flegrea (e in particolare nella zona di Pozzuoli), ricostruita su basi storiche per gli ultimi 2000 anni (Parascandola, 1947), è prodotta quasi interamente da fenomeni deformativi vulcano-tettonici ed ha raggiunto localmente valori dell'ordine della decina di metri; in questo intervallo temporale la componente bradisismica nella zona di Pozzuoli è risultata superiore di almeno 1 ordine di grandezza a quella eustatica. Tuttavia è lecito supporre che tale rapporto non venga mantenuto ma anzi invertito a favore della componente eustatica se consideriamo un intervallo di tempo ben superiore che includa i maggiori eventi glacio-eustatici del Pleistocene-Olocene come ad esempio il basso eustatico di -120 m del Wurm (attorno 18 Ka) nell'area mediterranea.

Considerando quindi tutti i fattori di incertezza, e con i dati attualmente a nostra disposizione, si può soltanto tracciare a grandi linee la successione degli episodi di emersione e sommersione della secca in rapporto sia alla attività vulcanica che alla successiva morfogenesi. Un primo indizio di condizioni subaeree è fornito dalla presenza di inclusi trachitici ed ignimbritici nella parte bassa della successione rilevata. Una successiva fase di sommersione è testimoniata dalla formazione dei tufi ialoclastitici, messisi in posto in acque poco profonde. L'effusione lavica terminale rappresenta infine un episodio subaereo e potrebbe essere associata alla messa in posto di una cupola lavica, fenomeno ricorrente nei centri eruttivi flegrei. Con il cessare dell'attività vulcanica e l'inizio della morfogenesi, la secca ritorna in ambiente subacqueo: ripetute stasi del livello marino

rendono possibile il formarsi di superfici di erosione suborizzontali e la genesi di cavità costiere.

Non è possibile definire la cronologia relativa di questi paleolivelli, ma per quanto riguarda la loro età, si possono fare alcune considerazioni:

- le curve di oscillazione eustatica del Pleistocene superiore-Olocene, elaborate per il Tirreno (Alessio et al. 1992), non evidenziano significative stasi del livello marino durante la risalita successiva al picco negativo wurmiano (*stage 2* della curva isotopica dell'ossigeno, Williams et al., 1988), riferito a circa 22-18 Ka;

- le forme di abrasione marina osservate (terrazzi e cavità costiere), dato il loro notevole sviluppo, richiedono una stasi del livello marino abbastanza lunga, tale da permettere il compiersi dei processi morfogenetici a livello costiero.

Queste considerazioni ci portano ad affermare, in prima approssimazione, che i processi morfogenetici evidenziati alla Secca della Formiche si siano compiuti nel corso della discesa pre-wurmiana del livello marino e dunque precedentemente allo *stage 2* della curva isotopica delle paleotemperature (circa 22-18 Ka). E' opportuno sottolineare che in tale contesto si è ipotizzato che la componente "bradisismica" dell'oscillazione relativa del livello marino sia stata significativamente inferiore rispetto a quella eustatica (che nell'intervallo temporale considerato risulta dell'ordine del centinaio di metri se consideriamo il minimo di -120 m del picco negativo wurmiano). In tale ipotesi di lavoro non si è tenuto conto di fenomenologie "locali" come la risalita del blocco dell'Epomeo a Ischia che ha provocato un innalzamento compreso tra 700 e 1000 metri dei sedimenti marini del Pleistocene Superiore (55-10 Ka) (Barra et al., 1992). Quest' ultima considerazione è da ritenersi valida se si ammette che il fenomeno di sollevamento sia stato limitato alla parte centrale dell'isola non interessando la fascia costiera relativamente stabile, secondo un modello di risorgenza intracalderica (Orsi et al., 1990).

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano: il Prof. Giuseppe Rolandi per le proficue discussioni sui caratteri vulcanologici dell'area indagata e per la lettura critica del manoscritto; i Proff. Ludovico Brancaccio e Giuseppe Luongo per la revisione del lavoro; le Prof.sse Franca Sgarrella e Maria Grazia Coppa per gli utili suggerimenti sulla tanaocenosi dei foraminiferi; il Dr. Fabrizio Antonioli per le discussioni sull'evoluzione morfogenetica.

Luigi Ferranti ("), Sergio Bravi (°) e Giovanni de Alteriis (*)

(") Dipartimento di Scienze della Terra, Università Federico II di Napoli
Largo San Marcellino 10, Napoli

(°) Dipartimento di Paleontologia, Università Federico II di Napoli
Largo San Marcellino 10, Napoli

(*) Geomare Sud - CNR, Napoli
Via Vespucci 9, Napoli

BIBLIOGRAFIA

ALESSIO M., ALLEGRI F., ANTONIOLI F., BELLUOMINI G., FERRANTI L., IMPROTA S., MANFRA L. & PROPOSITO A. (1992). Risultati preliminari relativi alla datazione di speleotemi sommersi nelle fasce costiere del Tirreno centrale. *Giornale di Geologia*, S. 3, V. 54/2, 165-193.

BARRA D., CINQUE A., ITALIANO A. E SCORZIELLO R. (1992). Il Pleistocene Superiore marino di Ischia: paleoecologia e rapporti con l'evoluzione tettonica recente. *Studi Geologici Camerti*, 1, 231-243.

BRAVI S., DE ALTERIIS G., FERRANTI L. (1993). Grotte sommerse della secca delle Formiche. *Notiziario Sez. Cai Napoli*, In stampa.

DI GIROLAMO P. & STANZIONE D. (1973). Lineamenti geologici e petrologici dell'isola di Procida. *Rend. Soc. It. Min. Petr.*, 29, Fasc. 1, 81-125.

DI GIROLAMO P. & ROLANDI G. (1975). Vulcanismo sottomarino latitebasaltico-latitico (serie potassica) nel Canale d'Ischia (Campania). *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Accademia Nazionale Scienze. Lettere Arti in Napoli*, S. 4, V. 42, 37 pp.

DI GIROLAMO P., GHIARA M.R., LIRER L., MUNNO R., ROLANDI G., & STANZIONE D. (1984). Vulcanologia e petrologia dei Campi Flegrei. *Boll. Soc. Geol. It.*, 103, 349-413.

IMBÒ G., BONASIA V. & GASPARINI P. (1964). Rilievo Gravimetrico dell'isola di Procida. *Ann. Osservatorio Vesuviano*, V. 6

LATMIRAL G., SEGRE A. G., BERNABINI M. & MIRABILE L. (1971). Prospezioni sismiche per riflessione nei Golfi di Napoli e Pozzuoli ed alcuni risultati geologici. *Boll. Soc. Geol. It.*, 90, 163-172.

LIRER L., ROLANDI G. & RUBIN M. (1991). 14C Age Of The "Museum Breccia" (Campi Flegrei) and its relevance for the origin of the Campanian Ignimbrite. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 48, 223-227.

ORSI G., GALLO G. E ZANCHI A. (1990). Simple-shearing block resurgence in caldera depressions. A model from Pantelleria and Ischia. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 47, 1-11.

PARASCANDOLA A., 1947. I fenomeni bradisismici del Serapeo di Pozzuoli. (Napoli, Ed. Genovese).

PESCATORE T. E ROLANDI G. (1981). Osservazioni preliminari sulla stratigrafia dei depositi vulcanoclastici nel settore di SW dei Campi Flegrei. *Boll. Soc. Geol. It.*, 100, 233-254.

RITTMANN A. (1930). Geologie der Insel Ischia. *Z. f. Vulkanol. Ergänzungsband*, 6.

ROSI M. and SBRANA A. (Ed.), (1987). Phlegrean Fields. *CNR Quad. Ric. Sci.*, 114, vol. 9, 175 pp.

ROSI M., SBRANA A. & VEZZOLI L. (1988). Stratigrafia delle Isole di Procida e Vivara. *Boll. Gr. Naz. Vulcanologia*, 4, 500-525.

SCANDONE R. (Ed.) (1991). Special issue of *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 48, 227 pp.

SGARRELLA F. E MONCHARMONT M. (1993). Benthic Foraminifera of the Gulf of Naples (Italy): systematics and autoecology. *Boll. Soc. Paleont. It.*, 32, 2, 145-161.

VEZZOLI L. (Ed.) (1988). Island of Ischia. *Quaderni de "La Ricerca Scientifica"*. Cnr, Progetto Finalizzato Geodinamica, V. 10, 126 pp.

WILLIAMS D.F., THUNELL R.C., TAPPA E., & RAFFI I. (1988). Chronology of the Pleistocene oxygen isotope record: 0-1.88 M.Y. B.P. *Palaeogeogr. Palaeoclim. Palaeoecol.*, 64, 221-240.

ON THE STABILITY OF HARDY'S INEQUALITIES

Nota di Guido Cortesani

Presentata dal Socio Carlo Sbordone

Adunanza del 4 giugno 1994

Riassunto : trattiamo la stabilità (o, in alcuni casi, l'ottimalità) di alcune disuguaglianze integrali collegate con le disuguaglianze di Hardy e con l'operatore massimale di Hardy e Littlewood.

Abstract : we deal with the stability (or, in some cases, with the optimality) of some integral inequalities related with Hardy's inequalities and with the maximal operator of Hardy and Littlewood.

Keywords : Hardy's inequalities, maximal function, Orlicz functions.

§.1. Introduction

The classical Hardy inequality in L^p , $1 < p < +\infty$, $f \geq 0$:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^1 f^p \quad (1.1_p)$$

degenerates, as $p \rightarrow 1$, into the $L \log L$ inequality

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right) \leq \frac{e}{e-1} \int_0^1 f \left[1 + \log \frac{f}{\int_0^1 f} \right] \quad (1.2)$$

and, as $p \rightarrow \infty$, into the Carleman inequality

$$\int_0^1 \exp\left(\int_0^x \log g\right) \leq e \int_0^1 g \quad (1.3)$$

While it is classical to deduce (1.3) from (1.1_p) with $f = g^{\frac{1}{p}}$, using the well known equality

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^x g^{\frac{1}{p}} \right)^p = \exp\left(\int_0^x \log g\right) \quad ,$$

it is not immediate to establish (1.2) as a limit case of (1.1_p) as $p \rightarrow 1$.

Moreover, inequality (1.2) is peculiar, because it becomes an equality for $f(x) = x^{\frac{1}{p}-1}$, while it is known that (1.1_p) is never an equality (obviously, unless f is the identically-zero function). Actually, the proof of (1.1_p) is based essentially on the equality

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p = -\frac{1}{p-1} \left(\int_0^1 f \right) + \frac{p}{p-1} \int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^{p-1} f(x) dx \quad (1.4)$$

(true for $f \in L^\infty$), from where one can deduce

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p \leq \frac{p}{p-1} \int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^{p-1} f(x) dx \quad , \quad (1.5)$$

and then go on following quite standard techniques.

Now, if we want the two members of (1.1_p) to be equal, then we must choose f in such a way that the = sign is preserved passing from (1.4) to (1.5); this obviously means that

$$-\frac{1}{p-1}\left(\int_0^1 f\right) = 0$$

and hence $f \equiv 0$, q.e.d.

In [5], pag.6, it is proved that if we replace (1.1_p) with

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f\right)^p \leq \frac{1}{1-p^{-\frac{1}{p-1}}} \left\{ \int_0^1 f^p + \frac{1}{p-1} \left[\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f\right)^p \right] \right\}, \quad (1.6_p)$$

then (1.2) can be obtained as a limit case of (1.6_p) as $p \rightarrow 1$.

With regard to inequality (1.6_p), the first problem we will discuss is to establish whether there exists an optimal function, i.e. a function f_p such that (1.6_p), evaluated on f_p , turns into an equality.

Next, we will show that the functions f_p that have the above specified property converge, as $p \rightarrow 1$, to the optimal function

$$f_\infty(x) = x^{\frac{1}{2}-1}$$

for the limit inequality (1.2).

Finally, optimality problems for other interesting inequalities will be discussed.

§.2. Optimal functions for inequalities (1.6)

For $1 < p < +\infty$, $f \geq 0$, let us consider inequality (1.6_p) in the following form :

$$\left(1 - p^{-\frac{1}{p-1}}\right) \int_0^1 \left(\int_0^x f\right)^p \leq \int_0^1 f^p + \frac{1}{p-1} \left[\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f\right)^p \right] \quad (2.1)$$

(with respect to the previous form, we have simply moved the quantity $1 - p^{-\frac{1}{p-1}}$ from the second to the first member); as we have already said in §.1, we are interested in finding a function f_p such that (2.1) becomes an equality when evaluated on it.

For $\alpha > \frac{p-1}{p}$, let us search for such a function among the ones of the form

$$f(x) = x^{\alpha-1}$$

(thanks to the condition imposed on α , f obviously belongs to L^p); we have

$$\int_0^1 f^p = \int_0^1 x^{\alpha p - p} dx = \frac{1}{\alpha p - p + 1} \quad ;$$

$$\left(\int_0^1 f\right)^p = \left(\int_0^1 x^{\alpha-1} dx\right)^p = \frac{1}{\alpha^p} \quad ;$$

(2.2)

$$\int_0^x f = \frac{1}{x} \int_0^x t^{\alpha-1} dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha} \quad ;$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f\right)^p = \frac{1}{\alpha^p} \int_0^1 x^{\alpha p - p} dx = \frac{1}{\alpha^p (\alpha p - p + 1)} \quad ;$$

thus, if we want the two members of (2.1) to be equal, we have to impose on α the following condition (obtained by using (2.2) into (2.1)) :

$$\left(1 - p^{-\frac{1}{p-1}}\right) \frac{1}{\alpha^p(\alpha p - p + 1)} = \frac{1}{\alpha p - p + 1} + \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{\alpha p - p + 1} - \frac{1}{\alpha^p} \right]. \quad (2.3)$$

Now, we go on as shown below :

$$1 - p^{-\frac{1}{p-1}} = \alpha^p + \frac{1}{p-1}(\alpha^p - \alpha p + p - 1) \quad ;$$

$$1 - p^{-\frac{1}{p-1}} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \alpha^p - \frac{p}{p-1} \alpha + 1 \quad ;$$

$$-p^{-\frac{1}{p-1}} = \frac{p}{p-1}(\alpha^p - \alpha) \quad ;$$

$$\alpha - \alpha^p = (p-1)p^{-\frac{p}{p-1}} \quad ;$$

$$\alpha - \alpha^p = p^{-\frac{1}{p-1}} - p^{-\frac{p}{p-1}} \quad ,$$

and it is clear that the latter equality is satisfied if we choose

$$\alpha = p^{-\frac{1}{p-1}} \quad (2.4)$$

(observe that this is the value of α where the function $\alpha - \alpha^p$ reaches its maximum on the interval $(0, 1)$).

Next, we have to check whether the value we have found for α is acceptable, i.e. whether it satisfies

$$\alpha > \frac{p-1}{p} \quad .$$

Using (2.4), the latter inequality becomes

$$p^{-\frac{1}{p-1}} > \frac{p-1}{p} \quad , \quad (2.5)$$

and, unfortunately, (2.5) holds if and only if $p < 2$; this means that we cannot use the function $x^{p^{-\frac{1}{p-1}-1}}$ to prove optimality of (2.1) when $p \geq 2$.

Anyhow, if $p=2$, this result can be obtained another way; actually, given the family of functions

$$f_{2,\varepsilon}(x) = x^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0) \quad ,$$

it's easy to show that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^x f_{2,\varepsilon} \right)^2}{2 \int_0^1 f_{2,\varepsilon}^2 - \left(\int_0^1 f_{2,\varepsilon} \right)^2} = 1 \quad ,$$

and this proves the asserted optimality of (2.1) in the case $p=2$.

Finally, we want to show that (2.1) can never be an equality if $p \geq 2$ (i.e., that exists an optimal function for it only when $p < 2$). Actually, in the proof of (2.1) the Young inequality

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (2.6)$$

(q is the conjugate exponent of p) with

$$a = p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 f^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad b = p^{-\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p \right]^{\frac{1}{q}}$$

is used. If we suppose that f is an optimal function for our inequality, then (2.6) must hold for it with the $=$ sign, and it is well known that this happens if and only if

$$b = a^{p-1} \quad .$$

Performing some obvious calculations, this condition turns into the following :

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p = p^{\frac{p}{p-1}} \int_0^1 f^p \quad . \quad (2.7)$$

On the other hand, we know by (1.1_p) that

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^1 f^p$$

(remember that Hardy's inequality is never an equality), and then

$$p^{\frac{p}{p-1}} < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \quad (2.8)$$

turns out to be a necessary condition for (2.7) to hold. Now, one can easily check that (2.8) is equivalent to (2.5), and hence it is true only for $p < 2$; this proves our assertion.

Summarizing the results obtained in the previous pages, we can conclude that the function

$$f_p(x) = x^{p^{-\frac{1}{p-1}}-1} \quad (2.9)$$

is, for $p < 2$, the optimal function we were looking for. If $p=2$, (2.1) is still an optimal inequality, but there exists no optimal function for it. Finally, (2.1) can

never be an equality when $p > 2$, but in this case nothing is known about its optimality.

Let us notice that the exponent of x in (2.9) is the opposite of the coefficient $1 - p^{-\frac{1}{p-1}}$ that appears in the first member of (2.1).

Another fact that is worth pointing out is the following : we have

$$\lim_{p \rightarrow 1} p^{-\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{e} ,$$

and hence, as $p \rightarrow 1$, the functions f_p converge to

$$f_\infty(x) = x^{\frac{1}{e}-1} ,$$

that, as we know, is the optimal function for the limit inequality (1.2).

For sake of completeness, we show how one can derive (1.2) from (1.6_p). Supposing at first that limits and derivatives under the integral sign are allowed with no restrictions, we take the limit as $p \rightarrow 1$ of both members of (1.6_p), obtaining:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right) \leq \frac{e}{e-1} \left\{ \int_0^1 f + \lim_{p \rightarrow 1} \frac{1}{p-1} \left[\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f \right)^p \right] \right\} . \quad (2.10)$$

Using De l'Hospital theorem, we see that

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{1}{p-1} \left[\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f \right)^p \right] &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left[\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f \right)^p \right] = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \left[\int_0^1 f^p \log f - \left(\int_0^1 f \right)^p \log \int_0^1 f \right] = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 f \log f - \int_0^1 f \log \int_0^1 f = \int_0^1 f \log \frac{f}{\int_0^1 f} \quad ,$$

and hence (2.10) is exactly the inequality we wanted to prove.

Now, we have to show that it is effectively possible to exchange limits, derivatives and integrals like we have done before.

Given $f \in L^{1+\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$ (and we can suppose without loss of generality that $\varepsilon < 1$), it's obvious that

$$f^p \leq f \vee f^{1+\varepsilon} \in L^1 \quad \forall p \in [1, 1+\varepsilon] \quad ,$$

so we have

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_0^1 f^p = \int_0^1 f \quad ,$$

thanks to the theorem of the dominated convergence.

By the same reason it is also

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p = \int_0^1 \left(\int_0^x f \right) \quad ,$$

because $f \in L^{1+\varepsilon} \Rightarrow \int_0^x f \in L^{1+\varepsilon}$.

Finally, let us show that

$$\frac{d}{dp} \int_0^1 f^p = \int_0^1 f^p \log f \quad (2.11)$$

and

$$\lim_{p \rightarrow 1} \int_0^1 f^p \log f = \int_0^1 f \log f \quad (2.12)$$

For every $\alpha > 0$, $t > 0$, the following inequality holds for a suitable c_α :

$$|\log t| \leq c_\alpha (t^\alpha + t^{-\alpha}) \quad (1) \quad ; \quad (2.13)$$

using (2.13) with $\alpha = \varepsilon/2$, $t = f(x)$, we then obtain that

$$|f^p \log f| \leq c_\varepsilon (f^{p+\frac{\varepsilon}{2}} + f^{p-\frac{\varepsilon}{2}}) \quad .$$

For p suitably near to 1, we have $p + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon$, and hence

$$f^{p+\frac{\varepsilon}{2}} \leq f \vee f^{1+\varepsilon} =: f_{(1)} \in L^1 \quad ;$$

on the other hand, again for small p , $p - \frac{\varepsilon}{2}$ is lesser than 1, and then

$$f^{p-\frac{\varepsilon}{2}} \leq 1 \vee f =: f_{(2)} \in L^1 \quad .$$

Therefore,

$$|f^p \log f| \leq c_\varepsilon (f_{(1)} + f_{(2)}) \in L^1 \quad ,$$

(1) to see that (2.10) is true, one only has to check that the function $\varphi(t) = \frac{|\log t|}{t^\alpha + t^{-\alpha}}$ is bounded on $(0, +\infty)$.

and we can again apply the dominated convergence theorem to justify both (2.11) and (2.12).

Using the technique that we have just described, (1.2) is obtained for functions $f \in L^{1+\varepsilon}$. After that, an easy argument of approximation and continuity makes (1.2) established for every $f \in L \log L$.

§.3. The inverse inequality of (2.1)

If $f:(0,1) \rightarrow [0,+\infty)$ is a non-increasing function, it is known that the following inequality holds ⁽²⁾ :

$$\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f \right)^p \leq \frac{p-1}{p} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p - \left(\int_0^1 f \right)^p \right] \quad ; \quad (3.1)$$

(3.1) is, for some aspects, the inverse inequality of (2.1), for here the difference

$\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f \right)^p$ is estimated from above by an expression depending on the integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p .$$

Like (2.1), (3.1) is also optimal, because the sign = holds in it if we take $f(x) = \chi_{[0,\gamma]}$, with arbitrary $\gamma \in (0,1)$ ⁽³⁾ .

In order to prove this claim, let us observe first that

$$\int_0^1 f^p = \int_0^\gamma dx = \gamma \quad ;$$

⁽²⁾ see [4], §.5, pag.7.

⁽³⁾ the case $\gamma=1$ is less interesting than the others; actually, if $f(x) = \chi_{[0,1]}$, then both members of (3.1) are zero.

$$\left(\int_0^1 f\right)^p = \left(\int_0^\gamma dx\right)^p = \gamma^p \quad ;$$

to evaluate $\int_0^x f$ we have to distinguish two cases : if $x \leq \gamma$, then

$$\int_0^x f = \frac{1}{x} \int_0^x dt = 1 \quad ;$$

if, on the contrary, $x > \gamma$, we find

$$\int_0^x f = \frac{1}{x} \left(\int_0^\gamma dt + \int_\gamma^x 0 dt \right) = \frac{\gamma}{x} \quad ;$$

this implies that

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p = \int_0^\gamma dx + \int_\gamma^1 \left(\frac{\gamma}{x} \right)^p dx = \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \gamma + \frac{1}{p-1} \gamma^p \quad .$$

Hence,

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^1 f^p - \left(\int_0^1 f \right)^p}{\int_0^1 \left(\int_0^x f \right)^p - \left(\int_0^1 f \right)^p} &= \frac{\gamma - \gamma^p}{\left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \gamma + \frac{1}{p-1} \gamma^p - \gamma^p} = \\ &= \frac{\gamma - \gamma^p}{\left(1 - \frac{1}{p-1} \right) (\gamma - \gamma^p)} = \frac{p-1}{p} \quad , \end{aligned}$$

and this completes the proof.

§.4. The limit case of (3.1) as $p \rightarrow 1$

As $p \rightarrow 1$, (3.1) degenerates into the following inequality (that can be viewed as a reversed $L \log L$ inequality) :

$$\int_0^1 f \left[1 + \log \frac{f}{\int_0^1 f} \right] \leq \int_0^1 \left(\int_0^x f \right) \quad (4.1)$$

(like (3.1), (4.1) is true only for non-increasing f). If $f(x) = 0$ somewhere, it is assumed that there is also

$$f(x) \log \frac{f(x)}{\int_0^1 f} = 0$$

(this is due to the fact that $\lim_{y \rightarrow 0} y \log \frac{y}{c} = 0$).

It's easy to check, then, that the same optimal functions for (3.1) are optimal for (4.1) too; actually, if $f(x) = \chi_{[0, \gamma]}$, (with $\gamma \in (0, 1]$), we have

$$\int_0^1 f = \gamma \quad ;$$

$$\int_0^x f = \begin{cases} 1 & \text{for } x \leq \gamma \\ \frac{\gamma}{x} & \text{for } x > \gamma \end{cases} \quad ;$$

$$\int_0^1 f \log \frac{f}{\int_0^1 f} = \int_0^\gamma f \log \frac{f}{\int_0^1 f} = \int_0^\gamma \log \frac{1}{\gamma} = \gamma \log \frac{1}{\gamma}$$

(remember that $f(x) = 0$ for $x > \gamma \Rightarrow f(x) \log \frac{f(x)}{\int_0^1 f} = 0$ for $x > \gamma$), and

therefore

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f \right) = \int_0^\gamma dx + \int_\gamma^1 \frac{\gamma}{x} dx = \gamma + \gamma \log \frac{1}{\gamma} = \int_0^1 f \left[1 + \log \frac{f}{\int_0^1 f} \right] ,$$

q.e.d.

However, (4.1) still remains optimal if we limit ourselves to consider it for strictly positive and non-increasing functions; actually, given $\gamma \in (0, 1]$, let us take in account, for $\varepsilon > 0$, the following family of functions :

$$f_\varepsilon(x) = \chi_{[0, \gamma]} + \varepsilon \chi_{(\gamma, 1]} .$$

Then one can check, by performing calculations almost identical to those shown above, that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 f_\varepsilon \left[1 + \log \frac{f_\varepsilon}{\int_0^1 f_\varepsilon} \right]}{\int_0^1 \left(\int_0^x f_\varepsilon \right)} = 1 . \quad (4.2)$$

Anyhow, remains still open the problem of establishing whether there exists a positive function that makes (4.2) hold with the $=$ sign (in other words, one would like to know whether the supremum of the quotient in the first member of (4.2), taken on the set of positive and non-increasing functions, is also a maximum or not).

§.5. A generalization of (3.1) to Orlicz functions

If $\Phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ is an absolutely continuous and non-decreasing function such that

$$\int_0^1 \frac{\Phi(s)}{s^2} ds < +\infty$$

(observe that this implies $\Phi(0)=0$), we can associate to it an Orlicz function ⁽⁴⁾, defined in the following way :

$$\Psi(t) := \Phi(t) + t \int_0^t \frac{\Phi(s)}{s^2} ds \quad .$$

Moreover, we will denote by Ω an open bounded subset of $\mathbf{R}^n$, and by M_r ($r \geq 1$) the r -maximal operator of Hardy and Littlewood on Ω :

$$M_r f(x) = \sup \left\{ \left(\int_Q |f|^r \right)^{1/r} : x \in Q \subseteq \Omega, Q \text{ cube} \right\}$$

for every $f \in L^r(\Omega)$; finally, we will use the symbol λ_r to denote the distribution function of the maximal function $M_r f$:

$$\lambda_r(t) = \left| \left\{ x : M_r f(x) > t \right\} \right|$$

(where $|\cdot|$ is the Lebesgue measure on $\mathbf{R}^n$). If $r=1$, we will write simply M and λ instead of M_1 and λ_1 .

In [2], pag.13, the following inequality, true for $f \geq 0$, is proved :

⁽⁴⁾ see [2], pag.7.

$$\int_{\Omega} \Psi(f) - \Psi\left(\int_{\Omega} f\right) \leq 2^n \int_{\Omega} \Phi(Mf) \quad . \quad (5.1)$$

Here we will show that, if $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbf{R}^n$, then (5.1) can be improved like this :

$$\int_0^1 \Psi(f) - \Psi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \Phi(Mf) - \Phi\left(\int_0^1 f\right) \quad ; \quad (5.2)$$

furthermore, if we suppose that

$$\Phi'(0) = 0 \quad ,$$

then inequality (5.2) is optimal.

In order to prove that (5.2) is true, we need two lemmas :

Lemma 1 (Riesz-Klernes) : let $f \in L^1(0,1)$, $\alpha \geq \int_0^1 f$; there exists a sequence $\{I_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ of intervals ⁽⁵⁾, with pairwise disjoint interiors, such that :

$$\text{i) } \int_{I_j} f = \alpha \quad \forall j \in \mathbf{N} \quad ;$$

$$\text{ii) } f(x) \leq \alpha \quad \forall \text{a.e. } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{j \in \mathbf{N}} I_j \quad .$$

For a proof of this result, see [3].

(5) some of these intervals can eventually be void; if this situation occurs, then the values of j corresponding to a void interval must be excluded from the following formula i).

Lemma 2 : let $r \geq 1$, $f \in L^r(0,1)$, $s \geq \left(\int_0^1 |f|^r \right)^{1/r}$; then

$$\frac{1}{s^r} \int_{\{|f|>s\}} |f|^r \leq \lambda_r(s) \quad . \quad (5.3)$$

Proof : because of our choice of s , we have $s^r \geq \int_0^1 |f|^r$, and hence, $\forall \varepsilon > 0$,

we can apply lemma 1, with $\alpha = (s + \varepsilon)^r$, to the function $|f|^r$.

Therefore, $\exists \{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ with the following properties :

$$\text{i) } \int_{I_j} |f|^r = (s + \varepsilon)^r \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad ;$$

$$\text{ii) } |f(x)| \leq s + \varepsilon \quad \forall \text{ a.e. } x \in [0,1] \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \quad .$$

It is clear that

$$\{x : |f(x)| > s + \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \subseteq \{x : M_r f(x) > s\} \quad ,$$

and hence

$$\begin{aligned} \lambda_r(s) &= |\{x : M_r f(x) > s\}| \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} |I_j| = \frac{1}{(s + \varepsilon)^r} \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{I_j} |f|^r = \\ &= \frac{1}{(s + \varepsilon)^r} \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{I_j} |f|^r = \frac{1}{(s + \varepsilon)^r} \int_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j} |f|^r \geq \frac{1}{(s + \varepsilon)^r} \int_{\{|f|>s+\varepsilon\}} |f|^r \quad . \end{aligned}$$

Now, let us take the limit of this inequality as $\varepsilon \rightarrow 0$; since

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \{|f| > s + \varepsilon\} = \{|f| > s\} \quad ,$$

it follows that

$$\lambda_r(s) \geq \frac{1}{s^r} \int_{\{|f| > s\}} |f|^r \quad ,$$

and the lemma is proved.

Using (5.3) for $r=1$, and taking into account some properties of the distribution function, we can finally prove (5.2) ⁽⁶⁾; we can suppose $f \neq 0$,

because otherwise this inequality is trivial. If we set $m = \int_0^1 f$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\{f > m\}} \Psi(f) &= - \int_m^\infty \frac{\Psi(t)}{t} d\left(\int_{\{f > t\}} f \right) = \left[- \frac{\Psi(t)}{t} \int_{\{f > t\}} f \right]_m^\infty + \int_m^\infty \left(\Phi'(t) \int_{\{f > t\}} f \right) \frac{dt}{t} \leq \\ &\leq \frac{\Psi(m)}{m} \int_{\{f > m\}} f + \int_m^\infty \Phi'(t) \lambda(t) dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

(for further details about the first equality we have used, see [4], §.2, pag.7;

moreover, to estimate $\frac{1}{t} \int_{\{f > m\}} f$ by $\lambda(t)$ we have used (5.3) with $r=1, s=t$). On

⁽⁶⁾ the proof that we give is similar to the one that is given in [2] for inequality (5.1); one of the differences lies in the fact that here we use (5.3), instead of an analogous inequality derived from the Calderon-Zygmund covering lemma.

the other hand, $\frac{\Psi(t)}{t}$ being a non-decreasing function (as one can easily check), we have

$$\int_{\{f \leq m\}} \Psi(f) = \int_{\{f \leq m\}} \frac{\Psi(f)}{f} f \leq \frac{\Psi(m)}{m} \int_{\{f \leq m\}} f ; \quad (5.5)$$

summing up (5.4) and (5.5), we obtain

$$\int_0^1 \Psi(f) \leq \frac{\Psi(m)}{m} \int_0^1 f + \int_m^\infty \Phi'(t) \lambda(t) dt ,$$

and then, thanks to the definition of m ,

$$\int_0^1 \Psi(f) - \Psi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_m^\infty \Phi'(t) \lambda(t) dt . \quad (5.6)$$

Being by assumption $f \neq 0$, we have also $m > 0$; if we take an arbitrary $\varepsilon \in (0, m)$, (5.6) implies :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(f) - \Psi\left(\int_0^1 f\right) &\leq \int_{m-\varepsilon}^\infty \Phi'(t) \lambda(t) dt = \int_{\{Mf > m-\varepsilon\}} \Phi(Mf) + \\ &- \Phi(m-\varepsilon) \lambda(m-\varepsilon) = \int_{\{Mf > m-\varepsilon\}} \Phi(Mf) - \Phi(m-\varepsilon) \cdot |\{Mf > m-\varepsilon\}| \quad (5.7) \end{aligned}$$

(notice that we have used the equality $\int_s^\infty \Phi'(t) \lambda(t) dt = \int_{\{Mf > s\}} \Phi(Mf) - \Phi(s) \lambda(s)$,

expressing a well known property of the distribution function (see [4], §.2, pag.6)). Using the definition of Mf , it is easy to see that

$$Mf(x) \geq \int_0^1 f = m > m - \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1) ,$$

and hence

$$\{Mf > m - \varepsilon\} = (0,1) \quad .$$

Therefore, it follows from (5.7) that

$$\int_0^1 \Psi(f) - \Psi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \Phi(Mf) - \Phi(m - \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in (0, m) \quad .$$

Taking the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$, and using the continuity of Φ , we finally obtain from the latter inequality

$$\int_0^1 \Psi(f) - \Psi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \Phi(Mf) - \Phi(m) \quad ,$$

that is exactly (5.2).

Now, let us prove optimality of (5.2); we will do it under the additional assumption

$$\Phi'(0) = 0 \quad .$$

We have to show that if we set, $\forall f \geq 0, f \neq 0$:

$$R(f) = \frac{\int_0^1 \Psi(f) - \Psi\left(\int_0^1 f\right)}{\int_0^1 \Phi(Mf) - \Phi\left(\int_0^1 f\right)} \quad , \quad (5.8)$$

then

$$\sup_{\substack{f \geq 0 \\ f \neq 0}} R(f) = 1$$

(we already know, because of (5.2), that this supremum is not greater than 1).

Choosing, for $\gamma \in (0, 1]$,

$$f_\gamma(x) = \chi_{[0, \gamma]} \quad ,$$

we have

$$\int_0^1 \Psi(f_\gamma) = \int_0^\gamma \Psi(1) dx = \gamma \Psi(1) \quad ;$$

$$\Psi\left(\int_0^1 f_\gamma\right) = \Psi\left(\int_0^\gamma dx\right) = \Psi(\gamma) \quad ;$$

$$\Phi\left(\int_0^1 f_\gamma\right) = \Phi\left(\int_0^\gamma dx\right) = \Phi(\gamma) \quad ;$$

$$Mf_\gamma(x) = \int_0^x f = \begin{cases} 1 & \text{for } x \leq \gamma \\ \frac{\gamma}{x} & \text{for } x > \gamma \end{cases}$$

(notice that f_γ is non-increasing), and therefore

$$\int_0^1 \Phi(Mf_\gamma) = \int_0^\gamma \Phi(1) dx + \int_\gamma^1 \Phi\left(\frac{\gamma}{x}\right) dx = \gamma \left(\Phi(1) + \int_\gamma^1 \frac{\Phi(s)}{s^2} ds \right)$$

(in the latter integral we have performed the change of variable

$x = \frac{\gamma}{s}$, $dx = -\frac{\gamma}{s^2} ds$). Then

$$R(f_\gamma) = \frac{\gamma\Psi(1) - \Psi(\gamma)}{\gamma\left(\Phi(1) + \int_\gamma^1 \frac{\Phi(s)}{s^2} ds\right) - \Phi(\gamma)} = \frac{\Psi(1) - \frac{\Psi(\gamma)}{\gamma}}{\Phi(1) + \int_\gamma^1 \frac{\Phi(s)}{s^2} ds - \frac{\Phi(\gamma)}{\gamma}} \quad (5.9)$$

As $\gamma \rightarrow 0$, it is easy to check that

$$\int_\gamma^1 \frac{\Phi(s)}{s^2} ds \longrightarrow \int_0^1 \frac{\Phi(s)}{s^2} ds \quad ;$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(\gamma)}{\gamma} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(\gamma)}{\gamma} = 0$$

(remember that is $\Phi'(0) = 0$ by assumption) and hence we deduce from (5.9) that

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} R(f_\gamma) = \frac{\Psi(1)}{\Phi(1) + \int_0^1 \frac{\Phi(s)}{s^2} ds} = \frac{\Psi(1)}{\Psi(1)} = 1 \quad ;$$

so, (5.6) is proved.

Bibliographic references

- [1] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya (1951), *Inequalities*, Cambridge University Press.

- [2] L.Greco, T. Iwaniecz and G.Moscariello (1993), *Limits of the improved integrability of the volume forms*, preprint of the Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", University of Naples.
- [3] I. Klemes (1985), *A mean oscillation inequality*, Proc. A.M.S., 93 (3).
- [4] C. Sbordone (1994), notes of the course of *Calcolo delle variazioni* taught at the Istituto Nazionale di Alta Matematica (Rome, Italy).
- [5] C. Sbordone (1994), *Weighted norm inequalities and their limit cases*, preprint of the Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", University of Naples.
- [6] G. Talenti (1967), *Sopra una disuguaglianza integrale*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, XXI (2), pag. 167-188.

A LIMIT CASE FOR A NONLINEAR ELLIPTIC DIRICHLET PROBLEM

Nota di Tonia Ricciardi

Presentata dal Socio Guido Trombetti

Adunanza del 4 giugno 1994

Riassunto. Si prova un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ad un'equazione ellittica non lineare nello spazio di Sobolev $W_0^{1,n}$. La condizione per l'esistenza nel caso $n = 2$ è confrontata con una ben nota condizione data da Talenti.

Abstract. An existence theorem for a nonlinear elliptic Dirichlet problem is proved in Sobolev space $W_0^{1,n}$. The existence condition in the case $n = 2$ is compared with a well known condition due to Talenti.

1. An existence theorem

Let G be a bounded open set in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; we consider Dirichlet problem

$$(1) \quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^n (a_i(x, Du))_{x_i} + a(x)|u|^{p-2}u = f & \text{in } G \\ u \in W_0^{1,p}(G), \end{cases}$$

where C_n denotes the measure of the unit ball in $\mathbb{R}^n$.

In fact:

i) by Hardy-Littlewood inequality and Proposition 1 we get

$$\begin{aligned} \left| \int_G f(x) \phi(x) dx \right| &\leq \int_0^{|G|} f^*(s) \phi^*(s) ds \\ &\leq \frac{\|D\phi\|_{L^n}}{nC_n^{\frac{1}{n}}} \int_0^{|G|} f^*(s) \left(\log \frac{|G|}{s} \right)^{1-\frac{1}{n}} ds = \frac{\|D\phi\|_{L^n}}{nC_n^{\frac{1}{n}}} \|f\|_{L(\log L)^{1-1/n}}; \end{aligned}$$

ii) similarly, we get

$$\begin{aligned} &\left| \int_G a(x) |u(x)|^{n-2} u(x) \phi(x) dx \right| \\ &\leq \left(\int_G a(x) |u(x)|^n dx \right)^{1-1/n} \left(\int_G a(x) |\phi(x)|^n dx \right)^{1/n} \\ &\leq \left(\int_0^{|G|} a^*(s) [u^*(s)]^n ds \right)^{1-1/n} \left(\int_0^{|G|} a^*(s) [\phi^*(s)]^n ds \right)^{1/n} \\ &\leq \frac{\|Du\|_{L^n}^{n-1} \|D\phi\|_{L^n}}{n^n C_n} \int_0^{|G|} a^*(s) \left(\log \frac{|G|}{s} \right)^{n-1} ds \\ &= \frac{1}{n^n C_n} \|a\|_{L(\log L)^{n-1}} \|Du\|_{L^n}^{n-1} \|D\phi\|_{L^n}. \end{aligned}$$

We prove the following

Theorem 1. Suppose $\|a_-\|_{L(\log L)^{n-1}} < n^n C_n$, where $a_-(x) = \max\{-a(x), 0\}$, and $p = n$. If monotonicity condition

$$A(u, u - \phi) - A(\phi, u - \phi) \geq 0, \quad \forall u, \phi \in W_0^{1,n}(G)$$

holds, then for every $f \in L(\log L)^{1-\frac{1}{n}}$ there exists a weak solution of problem (1).

Existence conditions for (1) when $a(x)$ belongs to a “limit” space are in [Ta] in the linear case. In Section 2 we compare our condition and the condition in [Ta] for $n = 2$. The case $1 < p < n$ is considered in [Tr].

To prove Theorem 1 we shall use the following

Theorem 2 ([Br]). Let X be a reflexive Banach space, $\tilde{B}(u, \phi)$ a real function on $X \times X$ which is linear in ϕ , but not necessarily in u . Suppose $\tilde{B}(u, \phi)$ is continuous in u and ϕ separately and moreover

$$(3) \quad \tilde{B}(u, u - \phi) - \tilde{B}(\phi, u - \phi) \geq 0 \quad \forall u, \phi \in X,$$

and there exists a function $c(r)$ which satisfies $\lim_{r \rightarrow +\infty} c(r) = +\infty$ such that

$$(4) \quad \tilde{B}(u, u) \geq c(\|u\|_X) \|u\|_X.$$

Then, for every linear continuous functional F on X , there exists $u \in X$ such that

$$\tilde{B}(u, u - \phi) = F(\phi)$$

for every $\phi \in X$.

PROOF OF THEOREM 1. By Proposition 1, Hardy-Littlewood inequality and the fact that $(u^n)^* = (u^*)^n$ it follows

$$\begin{aligned} \int_G a_-(x) |u(x)|^n dx &\leq \int_0^{|G|} a_-^*(s) (u^*(s))^n ds \\ &\leq \frac{\|Du\|_{L^n}}{n^n C_n} \int_0^{|G|} a_-^*(s) \left(\frac{\log |G|}{s} \right)^{n-1} ds \\ &= \frac{1}{n^n C_n} \|a_-\|_{L(\log L)^{n-1}} \|Du\|_{L^n}. \end{aligned}$$

Moreover, conditions (2) imply

$$\begin{aligned} A(u, u) &\geq \int_G |Du|^n dx - \int_G a_-(x) |u(x)|^n dx \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n^n C_n} \|a_-\|_{L(\log L)^{n-1}} \right) \|Du\|_{L^n}^n. \end{aligned}$$

So (4) holds for $\tilde{B}(u, \phi) = A(u, \phi)$ and $X = W_0^{1,n}(G)$.

Hypothesis (3) holds by assumption.

It remains to prove that $A(u, \phi)$ is separately continuous in u e in ϕ . By ii) we get

$$|A(u, \phi)| \leq c \|Du\|_{L^n}^{n-1} \|D\phi\|_{L^n} + \frac{1}{n^n C_n} \|a\|_{L(\log L)^{n-1}} \|Du\|_{L^n}^{n-1} \|D\phi\|_{L^n},$$

that is, continuity in ϕ .

Continuity of $A(u, \phi)$ in u can be shown as follows.

Let u_h converge to u strongly in $W_0^{1,n}(G)$. By standard arguments, conditions (2) and the Vitali-Lebesgue theorem yield

$$\int_G a_i(x, Du_h) \phi_{x_i} dx \rightarrow \int_G a_i(x, Du) \phi_{x_i} dx.$$

We have to show

$$\int_G a |u_h|^{n-2} u_h \phi dx \rightarrow \int_G a |u|^{n-2} u \phi dx.$$

For $n = 2$, in the same way as in ii), we get

$$\left| \int_G (a u_h \phi - a u \phi) dx \right| \leq c \left(\int_G |a| \phi^2 dx \right)^{1/2} \|D(u_h - u)\|_{L^2}$$

and convergence follows.

Let $n \geq 3$. From

$$\begin{aligned} \left| |u_h|^{n-2} u_h - |u|^{n-2} u \right| &\leq |u_h| \left| |u_h|^{n-2} - |u|^{n-2} \right| + |u - u_h| |u|^{n-2} \\ &\leq |u - u_h| |u|^{n-2} + |u - u_h| |u_h| \sum_{m=0}^{n-3} |u_h|^m |u|^{n-3-m} \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} &\left| \int_G a \phi (|u_h|^{n-2} u_h - |u|^{n-2} u) dx \right| \\ &\leq \int_G |a| |\phi| \left(|u - u_h| |u|^{n-2} + |u - u_h| |u_h| \sum_{m=0}^{n-3} |u_h|^m |u|^{n-3-m} \right) dx \\ &\leq \left(\int_G |a| |\phi|^n \right)^{1/n} \left(\int_G |a| |u|^n \right)^{(n-2)/n} \left(\int_G |a| |u - u_h|^n \right)^{1/n} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n-3} \left(\int_G |a| |\phi|^n \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_G |a| |u_h|^n \right)^{\frac{m+1}{n}} \left(\int_G |a| |u|^n \right)^{\frac{n-3-m}{n}} \left(\int_G |a| |u - u_h|^n \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

From this inequality convergence follows as in ii). Now the existence theorem follows from Theorem 2, as by assumption f is in the dual space of $W_0^{1,n}(G)$. ■

2. Comparison with Talenti's condition

The theorem above gives an existence condition for problem

$$(5) \quad \begin{cases} - \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + a(x)u = f & \text{in } G \\ u \in H_0^1(G), \end{cases}$$

where G is a bounded open set of $\mathbb{R}^2$, $f \in L(\log L)^{\frac{1}{2}}$ and ellipticity condition

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2 \quad a.e. \text{ in } G, \forall \xi \in \mathbb{R}^2$$

holds; namely

$$(6) \quad \|a_-\|_{L(\log L)^1} < 4\pi.$$

We wish to compare (6) with the following existence condition for problem (5) proved by Talenti in [Ta]:

$$(7) \quad \|a_-\|_{L^\Psi} < 4\pi(1 + \sqrt{|G|})^{-2},$$

where

$$\Psi(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq 1 \\ r \log r - r + 1 & r > 1 \end{cases}$$

and L^Ψ is the Orlicz space defined by Ψ , equipped with the norm

$$\|a\|_{L^\Psi} = \inf \{k > 0 : \int_G \Psi\left(\frac{|a(x)|}{k}\right) dx \leq 1\}.$$

It is readily shown (see [BS]) that the functional spaces L^Ψ and $L(\log L)^1$ coincide. So it is reasonable to ask oneself if one of (6), (7) implies the other. Actually, (7) implies (6) as following estimate holds:

Proposition 2. Let $a \in L(\log L)^1$. It results:

$$(8) \quad \|a\|_{L(\log L)^1} \leq (1 + \sqrt{|G|})^2 \|a\|_{L^\Psi}.$$

PROOF. The proof of this proposition is mainly in [Ta]; we recall it briefly for convenience of the reader.

Let $\Phi(s) = e^s - 1$ be the conjugate function of Ψ . It is well known (see [BS]) that for every $r, s \geq 0$

$$rs \leq \Psi(r) + \Phi(s).$$

It follows that for every $h > 0$ and for every $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^{|G|} a^*(t) \log \left(\frac{|G|}{t} \right) dt \leq \frac{h}{\alpha} \left\{ \int_0^{|G|} \Psi \left(\frac{a^*(t)}{h} \right) dt + \int_0^{|G|} \left[\left(\frac{|G|}{t} \right)^\alpha - 1 \right] dt \right\}.$$

By definition of L^Ψ norm, we get

$$\int_0^{|G|} a^*(t) \log \left(\frac{|G|}{t} \right) dt \leq \|a\|_{L^\Psi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{|G|}{1-\alpha} \right).$$

Minimization of the right hand side with respect to α yields (8). ■

Finally, we give some examples of functions which satisfy (6) and do not satisfy (7).

a) $a(x) = \frac{4\pi}{(1 + \sqrt{|G|})^2} \tilde{a}(x)$ where

$$\tilde{a}^*(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 < t \leq |G| \end{cases}$$

for sufficiently large values of $|G|$ (e.g. $|G| \geq 2$);

b) $a(x) = \frac{4\pi}{(1 + \sqrt{|G|})^2} \tilde{a}(x)$ where $\tilde{a}^*(t)$ is constantly equal to 4 for $0.4 \leq |G| < 1$;

c) $a(x) = \frac{4\pi}{(1 + \sqrt{|G|})^2} \tilde{a}(x)$ where $\tilde{a}^*(t)$ is constantly equal to $\frac{1}{|G|}$ for small values of $|G|$ (e.g. $|G| \leq 0.15$).

REFERENCES

- [Al] A. Alvino, *Un caso limite della disuguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz*, Rend. Ac. Sci. Fis. Mat. Napoli, **44** (1977), pp. 105-112.
- [BS] C. Bennet and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc., Orlando, Fla., 1988.
- [Br] F.E. Browder, *Nonlinear elliptic boundary value problems*, Bull. A.M.S. **69** (1963), pp. 862-874.
- [Ta] G. Talenti, *On a paper by A. G. Ramm*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **32** (1983), pp. 272-280.
- [Tr] M. Transirico, *Alcune osservazioni sul problema di Dirichlet per un'equazione ellittica*, Ricerche di Matematica, **33** (1984), pp. 233-251.

A MULTISCALED HOMOGENIZATION PROBLEM

Nota di Ciro D'Apice

Presentata dal Socio Carlo Sbordone

Adunanza del 5 novembre 1994

Riassunto In questa nota noi studiamo la H-convergenza di una particolare classe di funzioni a valore matriciale $(n \times p) \times (n \times p)$ del tipo $A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)$ con $x = (x', x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ aperto limitato.

Generalizzeremo alcuni risultati di A. Gaudiello ([G]) e rioterremo alcuni risultati di F. Murat ([M]), di L. Tartar ([T]) e, di A. Marino e S. Spagnolo ([M-S]).

Abstract In this note we study the H-convergence of a particular class of $(n+p) \times (n+p)$ matrix-valued functions

$A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right)$ with $x = (x', x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ open bounded set.

We are able to generalize some results of A. Gaudiello ([G]) and to obtain again some results of F. Murat ([M]), L. Tartar ([T]), A. Marino and S. Spagnolo ([M-S]).

Key words: Homogenization. Transmission problems.
Oscillating boundary.

0. Introduction

In this note we want to study some problems of homogenization described by elliptic equations with coefficients matrices of the kind $A\left(x, \frac{x'}{\epsilon}\right)$ (i.e. multiscaled); where $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ and $x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

These problems describe homogenization of phenomena characterized by a slow variable of more components and by a quick variable of less components with respect to the previous.

(for a detailed bibliography we refer to [A], [D], [S], [B-L-P]).

More precisely, we consider $(n+p) \times (n+p)$ matrix-valued function

$$A(x, y') = (a_{ij}(x, y'))_{i,j=1, \dots, n+p}$$

$$P_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{defined and bounded on } \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^n \text{ and such that} \\ \sum_{i,j=1}^{n+p} a_{ij}(x, y') \lambda_i \lambda_j \geq \alpha |\lambda|^2 \quad \forall (x, y') \in \mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{n+p}, \alpha > 0 \\ A(x, \cdot) \quad Y_n =]0, 1[\text{-periodic on } \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+p}, \\ A(x', \cdot, \cdot) \text{ measurable on } \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \quad \forall x' \in \mathbb{R}^n, \\ A(\cdot, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, y') \text{ continuous on } \mathbb{R}^n \\ \quad \quad \quad \forall (x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, y') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Moreover we define $H_{Y_n\text{-per}}^1(Y_n)/\mathbb{R}$ as the quotient of $H_{Y_n\text{-per}}^1(Y_n)$ by subspace of constants with the norm

$$\|v\|_{H_{Y_n}^1(Y_n)} = \|\text{grad} v\|_{L^2(Y_n)^n}.$$

Then we adopt the H-convergence (see section 1 for definition due to F. Murat and L. Tartar) and prove the following result:

Theorem 0.1. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ be a bounded open set and let, for any $\varepsilon \in \{\frac{1}{h}\}_{h \in \mathbb{N}}$

$$A^\varepsilon(x) = A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) \quad x = (x', x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) \text{ a.e in } \Omega.$$

Then, if P_0 holds, A^ε H-converges as ε goes to 0, to the matrix-valued function A^0 given by

$$(0.1) \quad A^0(x) = \int_{Y_n} \left(A(x, y') - A(x, y') \cdot B(x, y') \right) dy' \quad x \text{ a.e in } \Omega,$$

where for $i, j=1, \dots, n+p$ and for x a.e. in Ω , $B=(b_{ij})$ is

given by

$$(0.2) \quad b_{i,j}(x, y') = \begin{cases} \frac{\partial \tau_j(x, y')}{\partial y_i} & \text{if } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{if } n < i \leq n+p \end{cases} \quad y' \text{ a.e. in } Y_n$$

in terms of solutions $\tau_i(x, \cdot)$

$$(0.3) \quad \begin{cases} \int_{Y_n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x, y') \frac{\partial \tau_j(x, y')}{\partial y_j} \frac{\partial v(y')}{\partial y_i} dy' = \\ \int_{Y_n} \sum_{l=1}^n a_{i,l}(x, y') \frac{\partial v(y')}{\partial y_l} dy' \quad \forall v \in H_{Y_n}^1 \text{-per}(Y_n)/\mathbb{R}. \\ \tau_i(x, \cdot) \in H_{Y_n}^1 \text{-per}(Y_n)/\mathbb{R} \end{cases}$$

Theorem 0.1 allows to associate to every matrix A satisfying P_0 , the matrix A° defined by (0.1), (0.2) and (0.3).

Obviously, if $p=0$, matrix A° can be called, as usually, homogenized matrix. Now we give a formula which clarifies the structure of A° , in the case of $p \geq 1$, by homogenized matrices depending on p parameters.

In fact defined, for any fixed p -pla $(z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^p$, the following $n \times n$ matrix-valued function on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\hat{A}_{z_1, \dots, z_p}^{1, \dots, n}(x', y') = A_{1, \dots, n}^{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_p, y_1, \dots, y_n)$$

where $A_{1, \dots, n}^{1, \dots, n}$ denotes the submatrix of A determined by the first n -rows and n -columns and denoted by

$\hat{A}_{z_1, \dots, z_p}^0(x')$ the homogenized matrix of $\hat{A}_{z_1, \dots, z_p}$, we have

the following statement:

Corollary 0.2. For $x = (x', x_{n+1}, \dots, x_{n+p})$ a.e. in Ω it results

$$(0.4) \quad A^0(x) = \begin{matrix} n & p \\ \left\{ \begin{array}{c} \hat{A}^0(x') \\ (x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} B_1 \\ B_3 \end{array} \right\} \\ p & \left\{ \begin{array}{c} B_2 \\ B_3 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Theorem 0.1 as been proved in the case $p=0$ and $p=1$ in [D] and [G] respectively.

To obtain the result in the case $p>1$ we need a more general result of H-convergence for matrices independent of x . (see Theorem 2.2).

At the last we calculate the homogenized matrix for some particular classes of matrix-valued functions studied in [M], [M-S], [T].

1. Notations and preliminaries

Now we recall the definition and main properties of H-convergence.

Given $0 < \alpha < \beta < +\infty$ and an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, we set:

$$M(\alpha, \beta, \Omega) =$$

$$= \left\{ A \in \left(L^\infty(\Omega) \right)^{m^2} : \left(A(t)\lambda, \lambda \right) \geq \alpha |\lambda|^2, |A(t)\lambda| \leq \beta |\lambda|, t \text{ a.e. in } \Omega, \forall \lambda \in \mathbb{R}^m \right\}$$

Definition 1.1. Given the sequence:

$$\{A^h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset M(\alpha, \beta, \Omega) \text{ and } A^\circ \in M(\alpha', \beta', \Omega),$$

we said that $\{A^h\}_{h \in \mathbb{N}}$ H-converges to A° and we write:

$$A^h \xrightarrow{H} A^\circ \text{ as } h \rightarrow +\infty,$$

if and only if for any $\omega \subset\subset \Omega$ following condition is satisfied:

for any $f \in H^{-1}(\omega)$ the solutions u_h of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^h \operatorname{grad} u_h) = f & \text{in } \omega, \\ u_h \in H_0^1(\omega) \end{cases}$$

satisfy

$$\begin{cases} u_h \rightharpoonup u & \text{weakly in } H_0^1(\omega) \\ A^h \operatorname{grad} u_h \rightharpoonup A^\circ \operatorname{grad} u & \text{weakly in } \left(L^2(\omega) \right)^m \end{cases} \quad \text{as } h \rightarrow +\infty,$$

where u is the solution of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\circ \operatorname{grad} u) = f & \text{in } \omega \\ u \in H_0^1(\omega). \end{cases}$$

The following result is due to Murat and Tartar (see [M] and [T]).

Proposition 1.2. Let $\{A^h\}_{h \in \mathbb{N}}, \{B^h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset M(\alpha, \beta, \Omega)$.

1) If $\{A^h\}_{h \in \mathbb{N}}$ H-converges then its H-limit is unique and it

belongs to $M\left(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega\right)$.

ii) There exists a subsequence $\{A^h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ of $\{A^h\}_{h \in \mathbb{N}}$ and

$$A^o \in M\left(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega\right)$$

such that $A^h_k \xrightarrow{H} A^o$.

Now we introduce some notations.

Let $n \geq 1$. In the following we denote by

- $Y_n =]0, 1]^n$ the reference period,
- C_n an open cube of $\mathbb{R}^n$,
- b_t and d_t real numbers such that $-\infty < b_t < d_t < +\infty$ for $t=1, \dots, p$
- $D =]b_1, d_1[\times \dots \times]b_p, d_p[$,
- $C_{n+p} = C_n \times D$,
- $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) = (x', x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) = (x', x'')$, the generic point of C_{n+p} ,
- $y' = (y_1, \dots, y_n)$ the generic point of $\mathbb{R}^n$,
- ε a parameter taking values in the sequence $\left\{\frac{1}{h}\right\}_{h \in \mathbb{N}}$.

1.3 Definition. We denote by K the class of the $(n+p) \times (n+p)$ matrix-valued functions $A(x, y') = (a_{i,j}(x, y'))_{i,j=1, \dots, n+p}$ defined on $C_{n+p} \times \mathbb{R}^n$.

Then, if $A \in K$, we set for any ε

$$A^\varepsilon(x) = A\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) \quad x \text{ a.e. in } C_{n+p}$$

and, if for x a.e. in C_{n+p} it results $A(x, \cdot) \in \left(L^1(Y_n)\right)^{(n+p)^2}$ we

set:

$$\left(M_{Y_n} A \right) (x) = \left(\int_{Y_n} a_{l,j}(x, y') dy' \right)_{l,j=1, \dots, n+p} \quad x \text{ a.e. in } C_{n+p}.$$

2. The main homogenization result

We denote by K_1 the class of the $(n+p) \times (n+p)$ matrix-valued function defined on $C_{n+p} \times \mathbb{R}^n$, independent of x and satisfying following conditions:

P_1) A is measurable on $C_{n+p} \times \mathbb{R}^n$ and

$$\left(A(y') \lambda, \lambda \right) \geq \alpha |\lambda|^2 \quad \text{and} \quad |A(y') \lambda| \leq \beta |\lambda|, \quad \forall y' \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{n+p};$$

P_2) A is Y_n -periodic on $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.1. Let $A \in K_1$. Then the matrix A^0 , associated to A by (0.1) (0.2) and (0.3), is strictly elliptic.

This proof is given in [G].

Theorem 2.2. Let $A \in K_1$. Then A satisfies theorem 0.1.

Proof. At first let us note that for any ε

$$(2.1) \quad A^\varepsilon \in M(\alpha, \beta, C_{n+p})$$

Consequently, given $\omega \subset\subset C_{n+p}$ and $f \in H^{-1}(\omega)$, the following problem

$$(2.2) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(A^\varepsilon \operatorname{grad} u_\varepsilon) = f & \text{in } \omega \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\omega). \end{cases}$$

has a unique solution u_ε and moreover there exists a constant c , independent of ε , such that for any ε

$$(2.3) \quad \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\omega)} \leq c$$

So, passing eventually to a subsequence, we may suppose that

$$(2.4) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{weakly in } H_0^1(\omega)$$

$$(2.5) \quad A^\varepsilon \text{grad} u_\varepsilon \rightharpoonup g \quad \text{weakly in } (L^2(\omega))^{n+p} \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Then, in view of Lemma 2.1, it is enough to show that u is the solution of the following problem:

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \operatorname{grad} u) = f & \text{in } \omega \\ u \in H_0^1(\omega). \end{cases}$$

and that

$$(2.7) \quad g(x) = A^0 \operatorname{grad} u \quad x \text{ a.e. in } \omega$$

Set for $i=1, \dots, n+p$

$$(2.8) \quad \xi_i^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^\varepsilon(x') \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \quad x \text{ a.e. in } \omega$$

the variational formulation of (2.2) is given by

$$(2.9) \quad \int_\omega \left(\sum_{i=1}^{n+p} \xi_i^\varepsilon(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{t=1}^p \sum_{i=1}^{n+p} a_{i,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = \langle f, v \rangle$$

$$\forall v \in H(\omega).$$

Passing to a subsequence we have that

$$(2.10) \quad a_{ij}^\varepsilon \rightharpoonup M_{ij}^n(a_{ij}) \quad \text{weakly in } L^2(C_{n+p}) \text{ for } i, j=1, \dots, n+p,$$

$$(2.11) \quad \xi_i^\varepsilon \rightharpoonup \xi_i \quad \text{weakly in } L^2(\omega) \text{ for } i=1, \dots, n+p,$$

$$(2.12) \quad \sum_{t=1}^n a_{i,n+t}^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_{n+t}} \longrightarrow \sum_{t=1}^n M_{Y_n}(a_{i,n+t}) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}}$$

weakly in $L^2(\omega)$ for $i=1, \dots, n+p$ as ε goes to 0.

To prove (2.10) it is enough to note that

$$a_{ij}^\varepsilon \longrightarrow M_{Y_n}(a_{ij}) \quad \text{weakly in } L^2(C_n) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

From (2.1), (2.3) and (2.8) we easily obtain (2.11).

Let us prove (2.12).

Passing to a subsequence, from (2.1) and (2.3) we deduce that:

$$(2.13) \quad \sum_{t=1}^p a_{i,n+t}^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_{n+t}} \longrightarrow v_i \quad \text{weakly in } L^2(\omega) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Then from (2.4), (2.10) and (2.13) we have that:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} v_i \varphi \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} \sum_{t=1}^p a_{i,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_{n+t}} \varphi \, dx = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\omega} \sum_{t=1}^p a_{i,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+t}} u_\varepsilon \, dx = - \sum_{t=1}^p M_{Y_n}(a_{i,n+t}) \int_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+t}} u \, dx = \\ &= \sum_{t=1}^p M_{Y_n}(a_{i,n+t}) \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega) \end{aligned}$$

Therefore by (2.13), we deduce (2.12).

Now passing to the limit in (2.9), as $\varepsilon \rightarrow 0$, and using (2.11)

and (2.17) we have:

$$(2.15) \left\{ \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^{n+p} \xi_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{t=1}^p \sum_{i=1}^{n+p} M_{Y_n}(a_{i,n+t}) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = \langle f, v \rangle \right. \\ \left. \forall v \in H_0^1(\omega). \right.$$

To identify ξ_i , for $i=1, \dots, n+p$, let us introduce the following problem:

$$(2.16) \left\{ \int_{Y_n} \sum_{i,j=1}^n a_{ji}(y') \frac{\partial \hat{\tau}_i}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy' = \int_{Y_n} \sum_{i=1}^n a_{ii}(y') \frac{\partial v}{\partial y_i} dy' \right. \\ \left. \forall v \in H_{Y_n - \text{per}}^1(Y_n)/\mathbb{R} \right. \\ \left. \hat{\tau}_i(x, \cdot) \in H_{Y_n - \text{per}}^1(Y_n)/\mathbb{R} \right.$$

Since A satisfies P_1 , problem (2.16) has a unique solution.

We start to identify ξ_i , for $1 \leq i \leq n$.

Extended $\hat{\tau}_i$ by periodicity to a function in $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ and set for $i=1, \dots, n$ and for any ε

$$(2.17) \quad w_1^\varepsilon(x) = x_1 - \varepsilon \hat{\tau}_1\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \quad x \text{ a.e. in } C_{n+p},$$

we have that

$$(2.18) \quad w_1^\varepsilon \longrightarrow x_1 \quad \text{strongly in } L^2(C_{n+p}) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$(2.19) \quad \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{\partial w_1^\varepsilon}{\partial x_j} \longrightarrow M_{Y_n}(a_{ii}) - \sum_{j=1}^n M_{Y_n}\left(a_{ji} \frac{\partial \hat{\tau}_i}{\partial y_j}\right)$$

weakly in $L^2(C_{n+p})$ as $\varepsilon \rightarrow 0$, for $i=1, \dots, n+p$;

$$(2.20) \quad \int_{C_{n+p}} \sum_{l,j=1}^n a_{jl}^\varepsilon(x') \frac{\partial w_l^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_l} dx = 0 \quad \forall v \in H_o^1(C_{n+p})$$

$$(2.21) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n \int_{\omega} a_{l,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial \omega_l^\varepsilon}{\partial x_l} \phi dx =$$

$$= \sum_{t=1}^p \left[M_{Y_n}(a_{l,n+t}) - \sum_{l=1}^n M_{Y_n} \left(a_{l,n+t} \frac{\partial \hat{\tau}_l}{\partial y_l} \right) \right] \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \phi dx \quad \forall \phi \in C_o^\infty(\omega).$$

The boundedness of $\hat{\tau}_l \left(-\frac{x'}{\varepsilon} \right)$ in $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ provides (2.18).

By the same argument used to prove (2.9) and by boundedness

of $\frac{\partial \hat{\tau}_l}{\partial y_l} \left(-\frac{x'}{\varepsilon} \right)$ in $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ we obtain (2.19). From (2.16) and (2.17) we deduce (2.20).

Then from (2.4) and (2.19) we have (2.21). Indeed

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n \int_{\omega} a_{l,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial \omega_l^\varepsilon}{\partial x_l} \phi dx = \\ & = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n \int_{\omega} a_{l,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial \omega_l^\varepsilon}{\partial x_l} u_\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_{n+t}} dx = \\ & = - \sum_{t=1}^p \left[M_{Y_n}(a_{l,n+t}) - \sum_{l=1}^n M_{Y_n} \left(a_{l,n+t} \frac{\partial \hat{\tau}_l}{\partial y_l} \right) \right] \int_{\omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_{n+t}} dx \end{aligned}$$

therefore we obtain (2.21).

Now, fixed $\phi \in C_0^\infty(\omega)$ we choose $v = \phi \omega_1^\varepsilon$ in (2.9) and $v = \phi u^\varepsilon$ in (2.20).

Then taking the difference, we obtain

$$(2.22) \quad \int_{\omega} \left[\sum_{l=1}^{n+p} \xi_l^\varepsilon(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \omega_1^\varepsilon + \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^{n+p} a_{l,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \omega_1^\varepsilon + \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n a_{l,n+t}^\varepsilon(x') \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial \omega_1^\varepsilon}{\partial x_l} \phi - \sum_{l,j=1}^n a_{jl}^\varepsilon(x') \frac{\partial \omega_1^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} u^\varepsilon \right] dx = \\ = \langle f, \phi \omega_1^\varepsilon \rangle.$$

Hence passing to the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ and using (2.4), (2.11), (2.12), (2.18), (2.19) and (2.21) we have

$$(2.23) \quad \int_{\omega} \left\{ \sum_{l=1}^{n+p} \xi_l(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_l} x_l + \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^{n+p} M_Y(a_{l,n+t}) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} x_l + \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^p \left[M_Y(a_{l,n+t}) - \sum_{l=1}^n M_Y \left(a_{l,n+t} \frac{\partial \tau_l}{\partial y_l} \right) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \phi \right] + \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^n \left[M_Y(a_{l,l}) - \sum_{j=1}^n M_Y \left(a_{jl} \frac{\partial \tau_l}{\partial y_j} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_l} u \right] \right\} dx = \langle f, \phi x_l \rangle$$

On the other hand, choosing $v = \phi x_l$ in (2.15), we have

$$(2.24) \quad \int_{\omega} \left\{ \sum_{l=1}^{n+p} \xi_l(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_l} x_l + \xi_l(x) \phi + \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^{n+p} M_Y(a_{l,n+t}) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} x_l + \right.$$

$$+ \sum_{t=1}^p M_{Y_n}(a_{l,n+t}) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \phi \Big\} dx = \langle f, \phi x_l \rangle$$

Finally, comparing (2.24) with (2.23), for $l \neq n+p$ it results a.e. in ω

$$(2.25) \quad \xi_l =$$

$$= \sum_{l=1}^n \left[M_{Y_n}(a_{l,1}) - \sum_{j=1}^n M_{Y_n} \left(a_{jl} \frac{\partial \hat{\tau}_l}{\partial y_j} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_l} - \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n M_{Y_n} \left(a_{l,n+t} \frac{\partial \hat{\tau}_l}{\partial y_l} \right) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}}$$

Now let us identify ξ_{n+t} for $l=1, \dots, p$.

Extended $\hat{\tau}_{n+t}$ by periodicity to a function in $H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ and set $\forall \varepsilon$

$$(2.26) \quad w_{n+1}^\varepsilon(X) = \varepsilon \hat{\tau}_{n+1} \left(\frac{X'}{\varepsilon} \right) \quad \text{x a.e. in } C_{n+p}$$

by the same argument used to prove (2.18), (2.19), (2.20) and (2.21) we obtain

$$(2.27) \quad w_{n+1}^\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{strongly in } L^2(C_{n+p}) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$(2.28) \quad \sum_{j=1}^n a_{jl}^\varepsilon \frac{\partial w_{n+1}^\varepsilon}{\partial x_j} \longrightarrow \sum_{j=1}^n M_{Y_n} \left(a_{jl} \frac{\partial \hat{\tau}_{n+t}}{\partial y_j} \right)$$

weakly in $L^2(C_{n+p})$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ for $i=1, \dots, n+p$

$$(2.29) \quad \int_{C_{n+p}} \sum_{l=1}^n a_{jl}^\varepsilon(x') \frac{\partial w_{n+1}^\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_l} dx = \int_{C_{n+p}} \sum_{j=1}^n a_{n+1,j}^\varepsilon(x') \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

$$\forall v \in H_o^1(C_{n+p})$$

$$\begin{aligned}
(2.30) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n \int_{\omega} a_{l,n+t}^{\varepsilon}(x') \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial w_{n+l}^{\varepsilon}}{\partial x_l} dx = \\
= \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n \left[M_{Y_n} \left(a_{l,n+t} \frac{\partial \hat{\tau}_{n+l}}{\partial y_l} \right) \int_{\omega} \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \phi dx \right] \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\omega)
\end{aligned}$$

Now, fixed $\phi \in C_0^{\infty}(\omega)$ we choose $v = \phi w_{n+l}^{\varepsilon}$ in (2.9) and $v = \phi u^{\varepsilon}$ in (2.29). Then taking the difference, we obtain

$$\begin{aligned}
(2.31) \quad \int_{\omega} \left[\sum_{l=1}^{n+p} \xi_l^{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} w_{n+l}^{\varepsilon} + \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^{n+p} a_{l,n+t}^{\varepsilon}(x') \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_{n+t}} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} w_{n+l}^{\varepsilon} + \right. \\
\left. + \sum_{t=1}^p \sum_{l=1}^n a_{l,n+t}^{\varepsilon}(x') \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_{n+t}} \phi \frac{\partial w_{n+l}^{\varepsilon}}{\partial x_l} - \sum_{l,j=1}^n a_{l,j}^{\varepsilon}(x') \frac{\partial w_{n+l}^{\varepsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} u_{\varepsilon} \right] dx = \\
= \langle f, \phi w_{n+l}^{\varepsilon} \rangle - \int_C \left[\sum_{j=1}^n a_{n+l,j}^{\varepsilon}(x') \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u_{\varepsilon} + \xi_{n+l}^{\varepsilon}(x) \phi \right] dx
\end{aligned}$$

Hence, passing to the limit and using (2.4), (2.10), (2.11) and (2.28) we have:

$$\begin{aligned}
(2.32) \quad \int \sum_{t=1}^p \left[\sum_{l=1}^n M_{Y_n} \left(a_{l,n+t} \frac{\partial \hat{\tau}_{n+l}}{\partial y_l} \right) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \phi - \sum_{l,j=1}^n M_{Y_n} \left(a_{jl} \frac{\partial \hat{\tau}_{n+l}}{\partial y_j} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_l} u \right] dx = \\
= - \int_{\omega} \left[\sum_{j=1}^n M_{Y_n} \left(a_{n+l,j} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} u + \xi_{n+l}(x) \phi \right] dx \quad \text{for } l=1, \dots, p
\end{aligned}$$

Then from (2.32) we get that a.e. in ω

$$(2.33) \quad \xi_{n+1} = \sum_{l=1}^n \left[M_{Y_n} \left(a_{n+1,l} \right) - \sum_{j=1}^n M_{Y_n} \left(a_{jl} \frac{\partial \hat{\tau}_{n+1}}{\partial y_j} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_l} -$$

$$- \sum_{t=1}^p \left[\sum_{l=1}^n M_{Y_n} \left(a_{l,n+t} \frac{\partial \hat{\tau}_{n+1}}{\partial y_l} \right) \frac{\partial u}{\partial x_{n+t}} \right]$$

Now, noting that for $i, j=1, \dots, n+p$

$$\sum_{h=1}^n M_{Y_n} \left(a_{hj} \frac{\partial \hat{\tau}_1}{\partial y_h} \right) = \sum_{h=1}^n M_{Y_n} \left(a_{jh} \frac{\partial \tau_j}{\partial y_h} \right)$$

where τ_j is defined by (1.3) relatively to our A , from (2.25) and (2.32) we deduce that for $i=1, \dots, n+p$, a.e. in ω

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \left[M_{Y_n} \left(a_{ij} \right) - \sum_{h=1}^n M_{Y_n} \left(a_{jh} \frac{\partial \hat{\tau}_j}{\partial y_h} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_j} -$$

$$- \sum_{l=1}^p \left[\sum_{h=1}^n M_{Y_n} \left(a_{il,h} \frac{\partial \tau_{n+l}}{\partial y_h} \right) \frac{\partial u}{\partial x_{n+l}} \right]$$

Combining (2.15) and (2.34) we obtain that u is solution of the following problem:

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} \sum_{j=1}^{n+p} \left[M_{Y_n} \left(a_{ij} \right) - \sum_{h=1}^n M_{Y_n} \left(a_{jh} \frac{\partial \tau_j}{\partial y_h} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle f, v \rangle \\ \forall v \in H_0^1(\omega) \\ u \in H_0^1(\omega) \end{array} \right.$$

Finally (2.35) assures that u is the solution of (2.6).
 Moreover (2.11), (2.12) and (2.34) imply (2.7). ■

Proof of theorem 0.1.

Replacing theorem 2.3 of [G] with our theorem 2.2 and following the same outlines of section 3 of [G] it is straightforward to obtain theorem 0.1.

3. Representation of matrix A^0

To prove corollary 0.2 we observe that the homogenized matrix A^0 given in Theorem 0.1 is the product of matrices a blocks.

More precisely if $1 \leq h_1 < \dots < h_q < n+p$ and $1 \leq k_1 < \dots <$

$k_r \leq n+p$, we denote by $A_{h_1, \dots, h_q}^{k_1, \dots, k_r}$ the submatrix of A

determined by the rows $h_1, \dots, h_q$ and by the columns $k_1, \dots, k_r$. According to this position we have:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} A_{1, \dots, n}^{1, \dots, n} & A_{1, \dots, n}^{n+1, \dots, n+p} \\ A_{n+1, \dots, n+p}^{1, \dots, n} & A_{n+1, \dots, n+p}^{n+1, \dots, n+p} \end{pmatrix}.$$

Moreover from (0.2) and (0.3) we obtain that

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} \text{grad}_y \tau_1, \dots, \text{grad}_y \tau_n & \text{grad}_y \tau_{n+1}, \dots, \text{grad}_y \tau_{n+p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

where $\tau_l(x, \cdot)$, for $l=1, \dots, n+p$ and for a.e. in Ω , are the solutions of the equation:

$$-\text{div}_y \left(A_{1, \dots, n}^{1, \dots, n} \text{grad}_y \tau_l \right) = -\text{div}_y A_{1, \dots, n}^1$$

$$\text{and } \text{grad}_y \tau_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_l}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \tau_l}{\partial y_1} \end{pmatrix}$$

Then from (0.1) we deduce that:

$$(3.1) \quad A^0 = M_y \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

where:

$$M_1 = A_{1, \dots, n}^{1, \dots, n} - A_{1, \dots, n}^{1, \dots, n} (\text{grad}_y \tau_1, \dots, \text{grad}_y \tau_n)$$

$$M_2 = A_{1, \dots, n}^{n+1, \dots, n+p} - A_{1, \dots, n}^{1, \dots, n} (\text{grad}_y \tau_{n+1}, \dots, \text{grad}_y \tau_{n+p})$$

$$M_3 = A_{n+1, \dots, n+p}^{1, \dots, n} - A_{n+1, \dots, n+p}^{1, \dots, n} (\text{grad}_y \tau_1, \dots, \text{grad}_y \tau_n)$$

$$M_4 = A_{n+1, \dots, n+p}^{n+1, \dots, n+p} - A_{n+1, \dots, n+p}^{1, \dots, n} (\text{grad}_y \tau_{n+1}, \dots, \text{grad}_y \tau_{n+p})$$

when M_y denotes the average on Y .

Proof of corollary 0.2.

This result is an immediate consequence of (3.1) and theorem 0.1.

4. Some explicit calculations of the A^0

In this section we calculate explicitly the matrix A^0 in some particular cases.

a) Let

$$a(x, y') = (a_{ij}(x, y'))_{i,j=1,\dots,1+p}$$

be a $(1+p) \times (1+p)$ matrix-valued function defined on $\mathbb{R}^{1+p} \times \mathbb{R}$.

Now we calculate explicitly A^0 given by (0.1), (0.2) and (0.3). From (0.3) we deduce that for $k=0, \dots, p$

$$\frac{d\tau_{1+k}(x, y')}{dy_1} = \frac{a_{1,1+k}(x, y')}{a_{11}(x, y')} - \frac{1}{a_{11}(x, y')} \frac{\int_0^1 \frac{a_{1,1+p}(x, y')}{a_{11}(x, y')} dy'}{\int_0^1 \frac{1}{a_{11}(x, y')} dy'}$$

Therefore our matrix $B(x, y')$ (see (0.1)) is given by

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{a_{11} \int_0^1 \frac{1}{a_{11}} dy'} \dots \frac{a_{1,1+p}}{a_{11}} - \frac{\int_0^1 \frac{a_{1,1+p}}{a_{11}} dy'}{a_{11} \int_0^1 \frac{1}{a_{11}} dy'} & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \dots 0 \end{pmatrix}$$

Then A° is given by

$$A^\circ = \begin{pmatrix} a_{11}^\circ & \dots & a_{1n}^\circ \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^\circ & \dots & a_{nn}^\circ \end{pmatrix}$$

where

$$a_{11}^\circ = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a_{11}} dy'}$$

$$a_{1n}^\circ = \frac{\int_0^1 \frac{a_{1,1+p}}{a_{11}} dy'}{\int_0^1 \frac{1}{a_{11}} dy'}$$

.....

$$a_{n1}^{\circ} = \frac{\int_0^1 \frac{a_{1,1+p}}{a_{11}} dy'}{\int_0^1 \frac{1}{a_{11}} dy'}$$

$$a_{nn}^{\circ} = \int_0^1 \left(a_{1+p,1} \frac{a_{1+p,1} a_{1,1+p}}{a_{11}} \right) + \frac{\int_0^1 \frac{a_{1,1+p}}{a_{11}}}{\int_0^1 \frac{1}{a_{11}}} \int_0^1 \frac{a_{1,1+p}}{a_{11}}$$

In particular if A is a 2×2 matrix-valued function depending only on y' defined on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ we obtain the same result given in [M] and [T], i.e.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a_{11}^{\epsilon}} \longrightarrow \frac{1}{a_{11}^{\circ}} \\ \frac{a_{21}^{\epsilon}}{a_{11}^{\epsilon}} \longrightarrow \frac{a_{21}^{\circ}}{a_{11}^{\circ}}, \quad \frac{a_{12}^{\epsilon}}{a_{11}^{\epsilon}} \longrightarrow \frac{a_{12}^{\circ}}{a_{11}^{\circ}}, \\ a_{22}^{\epsilon} - \frac{a_{12}^{\epsilon} a_{21}^{\epsilon}}{a_{11}^{\epsilon}} \longrightarrow a_{22}^{\circ} - \frac{a_{12}^{\circ} a_{21}^{\circ}}{a_{11}^{\circ}}, \end{array} \right.$$

Moreover, if A is a 2×2 matrix-valued function defined on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, satisfying hypothesis of theorem 0.1 and such that

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(x_1, y_1) \beta(x_2) & 0 \\ 0 & \alpha(x_1, y_1) \beta(x_2) \end{pmatrix}$$

with

$$0 < \lambda \leq \alpha(x_1, y_1) \leq \Lambda$$

$$0 < \lambda \leq \beta(x_2) \leq \Lambda$$

we obtain the same result given in [M S] i.e.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{11}^\epsilon - a_{11}^o}{\alpha} \longrightarrow 0 \\ a_{21}^o = a_{12}^o = 0 \\ \frac{a_{22}^\epsilon - a_{22}^o}{\beta} \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

References.

- [A] H. ATTOUCH, Variational Convergence for Functions and Operators. Applicable Mathematics Series, Pitman London (1984).

- [B-L-P] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS and G. PAPANICOLAOU,
Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North
Holland, Amsterdam, (1978).
- [D] G. DAL MASO, An Introduction to Γ -convergence.
Birkhäuser, Boston, (1993).
- [Do] P. DONATO, Una stima per la differenza di H-limiti e
qualche applicazione a problemi di omogenizzazione,
Rend. Matematica, 4 (1983), p.623-640.
- [G] A. GAUDIELLO, Homogenization of elliptic transmission
problem. To appear in Advances in Mathematical
Sciences and Applications.
- [M-S] A. MARINO, S. SPAGNOLO, Un tipo di approssimazione
dell'operatore $\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij} D_j)$ con operatori $\sum_{i,j=1}^n D_i(b_{ij} D_j)$.
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) 23 (1969),
p.657-673.
- [M] F. MURAT, H-Convergence. Séminaire d'Analyse
Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger,
(1977-78).
- [S] E. SANCHEZ-PALENCIA, Non-Homogeneous Media and
Vibration Theory. Lecture Notes in Physics 127,
Springer, Berlin (1980)
- [T] L. TARTAR, Cours Peccot au Collège de France (1977).

Ciro D'Apice

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
Complesso Monte S. Angelo - edificio T
80125 Napoli via Cintia Italia

LA CORRISPONDENZA EPISTOLARE TRA ERNESTO CESÀRO E ROBERTO MARCOLONGO

Nota di L. Carbone, G. Cardone e F. Palladino

Presentata dal Socio P. de Lucia

Adunanza del 5 novembre 1994

Riassunto - Presentiamo la corrispondenza epistolare tra Ernesto Cesàro e Roberto Marcolongo. La prima parte della corrispondenza è dedicata ai tentativi di Marcolongo di ricoprire la cattedra di Meccanica razionale all'Università di Napoli; la seconda parte, invece, contiene un ampio scambio di opinioni, che consentì loro di esprimere in maniera diretta le proprie posizioni nei confronti di alcuni problemi in quel momento più dibattuti in Meccanica: la questione dei fondamenti, la questione del formalismo e, in forma più velata, i propri atteggiamenti nei confronti dell'approccio matematico alla Fisica.

Abstract - We edit here the letters between Ernesto Cesàro and Roberto Marcolongo. The first part of the letters is dedicated to Marcolongo's attempts to cover the chair of Pure Mechanics at University of Naples; the second part consists of an exchange of opinions which allowed them to express their positions about some controversial problems in Mechanics: the foundation question, the formalism question and their thought about mathematical approach to Physics.

Introduzione

L'epistolario¹ Cesàro - Marcolongo che viene qui presentato offre alcuni spunti di notevole interesse.

Il primo, in ordine cronologico, è quello della successione di Dino Padelletti, morto appena quarantenne, professore di Meccanica razionale all'Università di Napoli.

Padelletti, venuto a Napoli nel 1879, aveva cominciato con l'introdurre nel 1880 nei suoi corsi le nuove teorie quaternioniche, considerando le nozioni di somma, derivazione, moltiplicazione,

¹ Le lettere inviate da Marcolongo a Cesàro si trovano nel "Fondo Cesàro", posseduto dal Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II". Le lettere inviate da Cesàro a Marcolongo si trovano nel "Fondo Marcolongo", posseduto attualmente dal Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo" dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza". Si ringraziano i professori Pasquale Renno, direttore del Dipartimento "R.Caccioppoli", e Pieranita Castellani, direttrice del Dipartimento "G.Castelnuovo", per aver consentito la pubblicazione delle lettere qui presentate.

Le lettere inviate a Cesàro da altri matematici che sono state riportate per una maggiore comprensione di alcune questioni, fanno parte del citato "Fondo Cesàro"; ugualmente le lettere inviate a Marcolongo fanno parte del "Fondo Marcolongo".

Per notizie sui fondi si rinvia a: - S.BAGNULO - F.PALLADINO, «Sul recupero della corrispondenza del matematico Ernesto Cesàro (1859-1906)», *Fridericiana* 2 (1991), pp. 115-123;

- G.TERLIZZI, «Roberto Marcolongo: un fondo di lettere e manoscritti», *Rivista di Storia della Scienza* (2), vol. 1, n. 1 (1993), pp. 227-233.

Segnaliamo che dell'epistolario Cesàro è stato finora edito quanto segue: 1) F.PALLADINO, «Le lettere di Giuseppe Peano nella corrispondenza di Ernesto Cesàro», *Nuncius* 7 (1993), pp. 250-285; 2) lettere di G.Battaglini e Anna Egg a E.Cesàro, in G.FERRARO e F.PALLADINO, «Giuseppe Battaglini matematico al tempo del Risorgimento d'Italia», *Scienze in Italia, 1840-1880. Una storia da fare*, Quaderni Pristem / Documenti 5 (1994), pp. 123-156; 3) L.CARBONE-P.NASTASI-F.PALLADINO, «I carteggi Torelli-Cesàro, Landau-Cesàro, Cipolla-Cesàro e alcune questioni connesse», in corso di pubblicazione sulla rivista *Nuncius*.

momento geometrico, venendo anche in notevole contrasto con l'ormai anziano Fortunato Padula², figura assai notevole della matematica napoletana. La sua produzione, dopo una fase iniziale dedicata ai regolatori a forza centrifuga, al dinamometro, agli ingranaggi, si era concentrata negli anni '80 sullo studio dei sistemi di forze.

La sua scomparsa, in un momento di tumultuoso sviluppo della Fisica matematica, determinava un problema assai delicato.

Roberto Marcolongo³ ed Ernesto Cesàro⁴ erano stati colleghi di studio a Roma negli anni intorno al 1884. Entrambi erano (e sarebbero rimasti) molto legati a Valentino Cerruti, ordinario di Meccanica razionale, del quale Marcolongo fu assistente ancor prima di laurearsi e divenne allievo subito dopo la laurea, conseguita avendo come relatore Giuseppe Battaglini.

A Cesàro sembrò opportuno dar subito notizia all'amico della morte del Padelletti e stimolarlo a prender parte al concorso di cui la Facoltà di Napoli aveva chiesto il bando, nonostante qualche perplessità di Marcolongo per l'eventuale concorrenza di Carlo Somigliana. Questi, allievo di Enrico Betti a Pisa e di Eugenio Beltrami a Pavia, condiscipolo di Vito Volterra, incaricato a Pavia

² Fortunato Padula (1815-1881) in gioventù aveva contrastato gli aspetti più intransigenti della cosiddetta "scuola di geometria sintetica" sorta a Napoli.

³ Roberto Marcolongo (1862-1943). Per la figura di Marcolongo rinviamo a: 1) M.PASCAL, «Roberto Marcolongo», *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e matematiche di Napoli* (4), 15 (1949), pp. 1-12; 2) R.MARCOLONGO, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, SIEM (1935).

⁴ Ernesto Cesàro (1859-1906). Per la figura di Cesàro rinviamo, tra l'altro, alle seguenti biografie: A.PERNA, «Ernesto Cesàro», *Giornale di Matematiche*, vol. 45 (1907), pp. 299-332; riportata poi in *Opere scelte* (a cura dell'Unione Matematica Italiana) Roma, Cremonese, I, 1964-68, pp. VI-XXXVIII; G.TORELLI, «Ernesto Cesàro», *Atti della Accademia Pontaniana*, (2), 38 (1908), necr. n. 2, pp. 1-5. Ulteriori dati sono forniti dalle pubblicazioni dell'epistolario segnalate in nota 2.

dell'insegnamento di Fisica matematica dal momento del passaggio di Beltrami a Bologna, era già risultato eleggibile nel concorso come professore di Calcolo infinitesimale presso l'Università di Torino nel 1890.

Anche Battaglini stimolò Marcolongo a porsi tra i concorrenti. Gli scrisse infatti in una lettera del 13 marzo 1892:

"Io spero, caro Marcolongo, che voi vi porrete tra i concorrenti; voi siete dei pochissimi che si occupino di Meccanica tra noi; e sebbene l'Università di Napoli non abbia molte attrattive per chi desidera scolaresca studiosa e tranquilla, pure bisogna far di tutto per migliorare questo stato di cose, cercando principalmente insegnanti competenti e che abbiano il sentimento del proprio dovere".

Certamente Marcolongo poteva anche contare sul sostegno di Cerruti.

D'altro canto la Facoltà di Pavia si accingeva a chiedere anch'essa il bando per il posto di Fisica matematica rimasto vacante.

Sembrava pertanto che fosse possibile trovare una soluzione adeguata per le aspirazioni sia di Marcolongo che di Somigliana. Tuttavia questo quadro subì un rapido mutamento.

Accadde infatti che Francesco Siacci, allora ordinario di Meccanica Superiore a Torino, già deputato in un collegio romano, uno dei massimi esperti italiani in balistica e titolare di Balistica nella Scuola d'Applicazione di Artiglieria e Genio assumeva il grado di colonnello nell'esercito e veniva nominato Senatore del Regno. Egli si vedeva così costretto a dare le dimissioni da militare essendo il grado di Colonnello incompatibile con la posizione di Professore universitario e maturava l'esigenza di un trasferimento che gli avrebbe consentito di contemperare meglio l'ufficio di professore con quello di senatore.

Siacci, che aveva già allo scopo fatto un tentativo presso l'Università di Roma frustrato dall'intervento di Luigi Cremona, si orientava allora verso Napoli. La sua decisione non fu ben accolta

nella comunità matematica; ad esempio il 23 settembre Battaglini così scriveva a Marcolongo:

" (...) Il Siacci vuol fare principalmente l'uomo politico, ed avere la Cattedra come un sopra più, che gli dia il minimo incomodo, e così ancora cresce il numero di quei Professori che tutto fanno fuorché il proprio dovere come insegnanti. Egli tentò alcuni anni or sono di entrare nella Facoltà di matematica di Roma, ma Cremona riuscì a sventare la cosa; ora aspira a venire a Napoli (ove i professori fanno il comodo loro) e benché la Cattedra messa a Concorso sia per Prof. straordinario, egli passerebbe subito ad ordinario, non essendo qui limitato il numero dei Prof. ordinari. Pare impossibile come presso di noi, con qualunque Ministro della I.P., non si riesca a stabilire un migliore andamento nella Istruzione Superiore".

La Commissione per il Concorso per Pavia⁵ costituita da Cerruti, Padova, Basso, Morera e Volterra dichiarava eleggibile Somigliana e Marcolongo con cinque sì e graduava nel seguente ordine:

- 1° Somigliana, con punti 47
- 2° Marcolongo, con punti 40

La Commissione per il Concorso di Napoli⁶, cui aveva fatto domanda anche Siacci, costituita da Ruffini, Cerruti, Padova, Morera e Volterra procedeva all'esame delle domande e riscontrava che in quella di Siacci non erano state osservate le prescrizioni dell'articolo 104 del Regolamento del 26 ottobre 1890 (come in dettaglio è specificato alla lettera 5). Essa pertanto si asteneva dal classificarlo, ma affermava che:

⁵ Cfr. «Bollettino Ufficiale della Pubblica Istruzione», anno XX (1893), pp. 475-480.

⁶ Cfr. «Bollettino Ufficiale della Pubblica Istruzione», anno XX (1893), pp. 330-337.

"Se alla domanda del Professor Siacci non si fossero riscontrati questi vizi di forma, la Commissione per la conoscenza che ha delle importanti pubblicazioni del chiaro professore e degli altri suoi titoli, non solo sarebbe stata unanime nel concedergli la eleggibilità, ma ancora nel metterlo avanti e di gran lunga agli altri concorrenti".

La Commissione dichiarava poi eleggibili all'unanimità Somigliana e Marcolongo, a maggioranza Gebbia e stilava la seguente graduatoria:

- 1° Somigliana, con punti 47
- 2° Marcolongo, con punti 43
- 3° Gebbia, con punti 32

Nel proporre come professore straordinario di Meccanica razionale "in prima linea" Somigliana e "in seconda linea" Marcolongo, la Commissione osservava che Marcolongo, "qualora Somigliana non avesse avuto intenzione di occupare il posto, avrebbe potuto esservi nominato senza l'esperimento di un'ulteriore concorso".

Il Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione nella tornata del 27 ottobre approvava le conclusioni della Commissione per il concorso di Napoli e raccomandava, su proposta di Beltrami, la nomina di Marcolongo nel caso di rinuncia di Somigliana.

Il 31 ottobre Cremona così scriveva a Marcolongo:

"Già ella saprà che la deliberazione del C.S. è riuscita conforme ai comuni desideri".

A fine ottobre Marcolongo, essendo certa la preferenza di Somigliana per Pavia, poteva dunque giustamente pensare di essere nominato e di recarsi a Napoli nella seconda metà di novembre pur rimanendo ancora un ultimo ostacolo: l'approvazione del Ministro Martini. In ogni caso il 29 ottobre egli, sia pure in maniera velata, sondava Cesàro, che si accingeva a divenire preside della Facoltà di Napoli, sugli orientamenti della stessa.

In effetti gli eventi stavano evolvendosi in maniera ben diversa dai desideri di Marcolongo.

Il 10 novembre si tenne una riunione della Facoltà di Matematica.

Della riunione Battaglini diede un resoconto particolareggiato a Marcolongo:

Napoli, 15 novembre 1892

"Caro Marcolongo,

Alcuni giorni or sono si riunì questa Facoltà Matematica (riunione alla quale io non intervenni), e credette conveniente di esporre al Ministro dell' I.P. il desiderio che il Prof. Siacci (uno dei noti concorrenti alla Cattedra di Meccanica razionale nella Università di Napoli) sia nominato a tal posto: i Colleghi ritengono che il Ministro dell' I.P. non terrà conto delle opposizioni fatte dal Consiglio Superiore dell' I.P. alla nomina del Siacci, perché fondata sulla mancanza di alcune formalità nella di Lui domanda. Generalmente qui si ritiene (e non a torto) il Siacci come un valente scienziato, tanto che si è costituito già un partito per nominarlo Socio di questa Accademia delle Scienze fisiche e matematiche, in alcune nomine prossime a farsi nell'Accademia. Caro Marcolongo mi dispiace che le probabilità per la vostra venuta a Napoli si fanno sempre minori. Non vi scoraggiate però, siete molto giovane e non potrà mancarvi un posto conveniente in qualche Università del Regno".

Marcolongo sorpreso dalla lettera di Battaglini la trasmise a Cremona, e questi il successivo 19 novembre restituendogliela così commentava:

Caro Dr. Marcolongo,

Le restituisco la lettera del prof. Battaglini, la quale a me sembra abbastanza chiara. Si vede ch'egli ha mutato opinione e s'è lasciato persuadere. Metta dunque il cuore in pace; l'avvenire Le darà presto un compenso.

Il suo aff. L.Cremona

In questa vicenda la posizione di Cesàro era assai delicata e già in una lettera del 4 ottobre all'amico si era mostrato decisamente pessimista: i meriti scientifici di Siacci erano indubbi, la Facoltà di Napoli era costituita da membri piuttosto anziani ed egli stesso era riuscito a trasferirsi da Palermo appena l'anno prima certamente non secondo le primitive intenzioni della Facoltà e con un comportamento assai simile a quello di Siacci. Pertanto, presumibilmente, egli dovette far sua l'opinione della maggioranza.

Così il 17 novembre Siacci gli scriveva nella sua qualità di preside:

"Egregio Sig. Preside

Già da vari giorni ho notizia del voto mandato il 10 di questo mese dalla Facoltà di Napoli al Ministero dell' I.P., relativo all'occupazione della cattedra di Meccanica razionale vacante in cotesta Università. Ma siccome seppi che il Ministro intendeva mandarmi di quel voto partecipazione ufficiale, io mi riserbavo di scrivere allora alla S.V. per esprimere alla Facoltà la mia profonda gratitudine per un attestato tanto onorevole, tanto affettuoso per me, tanto superiore al mio merito. Ma tale comunicazione fino ad oggi non mi è pervenuta, ed io non voglio più oltre tardare a compiere verso la S.V. e verso gli illustri suoi colleghi il mio dovere. Ho qui presente la deliberazione della Facoltà, e rileggendola mi sento commosso e confuso di tanta loro bontà ! Possa io mostrarmene degno ! Il Ministro Martini, che vidi solo Sabato scorso, non fa più difficoltà. Io però lo pregai a soprassedere alcuni giorni prima di fare il decreto (...)"

E il 24 novembre 1892 aggiungeva:

"Egregio Collega,

Facendo seguito alla mia lettera del 17, le accludo la copia della risposta da me fatta oggi (24) al Ministro Martini. Come Ella

vede, accetto con animo riconoscente l'onorevole offerta, ma chiedo di cominciare le lezioni nell'anno venturo (...)"

Marcolongo, il 6 maggio 1893, premeva su Cesàro affinché Siacci abbandonasse Torino già dall'anno accademico 1892 in maniera tale da offrire "un'altra via per chi lavora modestamente ed ha il nobile desiderio di ottenere una posizione in qualche università".

Ma anche questo tentativo risultò inutile: la cattedra di Napoli fu affidata per quell'anno a Luigi Pinto e Siacci fu trasferito a Napoli come ordinario con Regio Decreto del 18 luglio 1893⁷. La cattedra lasciata libera da Siacci a Torino veniva coperta per trasferimento da Vito Volterra.

Marcolongo dovette così ripiegare su una cattedra di professore straordinario a Messina nel novembre 1895. Tuttavia non cessò nei suoi tentativi di ottenere una posizione accademica a Napoli.

Siacci infatti nel 1902 si orientò a passare come ordinario sulla cattedra di Meccanica Superiore cercando di lasciare contemporaneamente quella di Meccanica Razionale così rimasta vacante al suo allievo ed assistente Domenico De Francesco.

L'obiettivo era piuttosto complesso sia per una certa debolezza della posizione scientifica di De Francesco, sia perché era noto l'interesse di Marcolongo per la sede di Napoli. Così piuttosto complicata risultò anche la linea d'azione elaborata da Siacci. Essa era così articolata:

(i) la facoltà napoletana non avrebbe bandito direttamente la cattedra di Meccanica;

(ii) De Francesco sarebbe risultato uno dei primi tre eleggibili in un concorso già bandito in altra sede;

⁷ Cfr. «Bollettino Ufficiale della Pubblica Istruzione», anno XX, 1893, p. 1641.

(iii) il Ministro della I.P. avrebbe consentito l'applicazione retroattiva del nuovo regolamento universitario⁸ anche a concorsi banditi precedentemente;

(iv) la Facoltà napoletana utilizzando l'articolo 44 del regolamento avrebbe chiamato De Francesco sulla cattedra liberatasi.

Per tentare di realizzarla egli utilizzò la vasta rete delle sue relazioni universitarie e politiche.

Innanzitutto riuscì, sfruttando il diritto di scelta all'interno di una rosa di eletti del Ministro della Pubblica Istruzione, a far escludere Marcolongo dalla Commissione per il concorso di Meccanica Razionale per l'Università di Genova che si tenne alla fine del 1902. Reso così inoffensivo Marcolongo, nel concorso De Francesco a maggioranza e con soli 40 punti riuscì ad essere dichiarato terzo tra gli eleggibili.

Questa prima operazione sollevò ostilità all'interno della comunità matematica: così ad esempio Cerruti e Cremona ne diedero immediatamente notizia allo stesso Marcolongo.

Marcolongo allora tentò di far pressione sui suoi amici nella Facoltà napoletana. Cesàro e probabilmente Montesano, anche questo suo antico collega di studi e allora Preside della Facoltà stessa, per cercare di ottenere almeno che un'eventuale cattedra di Meccanica venisse ricoperta mediante un concorso cui volentieri si sarebbe assoggettato.

La posizione di Cesàro era ancora una volta assai delicata. Negli anni intercorsi tra la venuta di Siacci a Napoli e gli ultimi avvenimenti, varie volte egli aveva dovuto ricorrere all'influenza

⁸ Cfr. Regolamento generale universitario del 26 ottobre 1903. Interessante è una circolare del Ministro Orlando riguardante l'art. 44, tesa a chiarire l'interpretazione dell'articolo in questione (cfr. «Sull'art. 44 del Regolamento generale universitario 26 ottobre 1903», *Annuario della R. Università degli Studi di Napoli* (1903-04), pp. 191-193).

politica del collega per la soluzione dei problemi economici che gli causava la sua numerosa famiglia.

Così, ad esempio, l'intervento di Siacci sul Ministro Chiarini fu decisivo nel fargli ottenere un altissimo livello di retribuzione dell'incarico (3500 lire annue).

Tuttavia in risposta alla lettera di Marcolongo del Dicembre 1902, sia pure in forma assai cauta, dichiarava che l'eventualità di un'assegnazione "quasi di nascosto" della cattedra napoletana sarebbe stata fugata da una domanda di trasferimento di Marcolongo accompagnata da una dichiarazione di disponibilità al concorso. Aggiungeva inoltre che fra gli aspiranti avrebbe potuto esserci egli stesso, dal quale però l'amico non aveva nulla da temere.

La vicenda proseguì durante tutto il corso del 1903 e giunse al suo momento decisivo tra la fine di quell'anno e l'inizio del successivo.

Nel novembre del 1903 Marcolongo rinnovava le sue pressioni su Cesàro, ma anche Siacci sentiva la necessità di riprendere contatto con lui. Gli scriveva infatti il 27.11.1903:

"Caro Collega ed amico,

Arrivo in questo momento da Roma. A Roma tutto bene: il Ministro, con cui parlai ieri sera alle 8 ½ è sempre dispostissimo. La Corte de' Conti, me l'ha detto egli stesso, non ha più difficoltà per la registrazione del nuovo regolamento universitario, e mi ha invitato a far presto, promettendomi che farà subito i due decreti. Quindi da questo lato sono sicuro, e mi pare di poterlo essere dal lato della Facoltà. Sono un po' stanco perché ho passato due notti in viaggio. Le stringo la mano affettuosamente

Suo aff.mo Siacci

P.S. Temevo di Cerruti, di cui il Marcolongo fu assistente, ma sebbene il Marcolongo sia stato a trovarlo non si è lasciato commuovere. (...)"

La Facoltà napoletana doveva comunque a quella data ormai essere disponibile a sostenere le tesi di Siacci.

La questione si risolse l'11 gennaio del 1904 in seno al Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione che il Ministro Orlando aveva invitato ad esprimere un parere.

Il 15 gennaio Siacci comunicava a Cesàro l'esito della vicenda:

"Egregio Collega ed amico, io ho un dovere da compiere verso di Lei. Il Consiglio Superiore invitato dal Ministro Orlando a dirimere alcuni dubbi sulla interpretazione di certi articoli del nuovo Regolamento, ha nella seduta del giorno 11 ritenuto che l'art[icolo] 44 non sia applicabile ai concorsi banditi prima della promulgazione del Regolamento stesso. Cadono così le mie proposte, ma a me resta il dovere di esprimerle, insieme alla mia viva riconoscenza, il rammarico di avere inutilmente disturbato Lei e la Facoltà".

Un indizio forse di un mutato atteggiamento dello stesso Cesàro rispetto a quanto dichiarato a Marcolongo nella lettera del dicembre del 1902 si può cogliere nella lettera di quest'ultimo del 1904 nella quale dichiarava di conservare per l'amico "un memore affetto e riconoscenza non certo turbate, ti prego di crederlo, da nessun avvenimento" e proseguiva esclamando "Quante circostanze in questa benedetta carriera!".

Marcolongo certamente dovette essere assai amareggiato dalle continue avversità incontrate in quella che egli riteneva una sua legittima aspirazione; ma la sua tenacia alla fine prevalse: quattro anni dopo, nel 1908, alla morte di Siacci, la facoltà napoletana all'unanimità deliberò il suo trasferimento dandogli ampio riconoscimento dei suoi meriti didattici e scientifici⁹.

⁹ Cfr. «Bollettino del Ministero della Pubblica Istruzione», (1908), p. 33.

Senza dubbio comunque gli spunti più interessanti contenuti nell'epistolario si incontrano nelle sette lettere scambiate tra la fine di gennaio e gli inizi di febbraio del 1906.

In quel periodo di tempo Cesàro spinto dai suoi problemi economici e dalle difficoltà che qualche rigidità del suo carattere gli aveva procurato, era ormai deciso a trasferirsi a Bologna per ricoprire la cattedra di Meccanica Razionale lasciata libera dall'ormai più che ottantenne Ferdinando Ruffini. Egli aveva già tenuto dei corsi di Fisica Matematica per incarico a Palermo, al cui contenuto aveva dato una forma definitiva nel volumetto del 1894 *Introduzione alla teoria matematica dell'Elasticità*, ed era anche un conoscitore profondo e riconosciuto¹⁰ di Maxwell, alla cui teoria aveva dato qualche contributo nel 1889¹¹; tuttavia si riteneva non ancora pronto per tenere l'insegnamento di Meccanica Razionale.

Nell'accingersi a scrivere le sue nuove lezioni¹² si rivolgeva così all'amico per suggerimenti e consigli.

¹⁰ A tale proposito così scriveva Beltrami a Cesàro in una lettera del 5 marzo 1889, dopo aver ricevuto in dono la nota «Sulle formole di Maxwell»: "Mi fa molto piacere l'udire che Ella gusta ed intende bene il Maxwell: verrà tempo che Le chiederò qualche delucidazione sulla teoria di questo valentuomo, che io ammiro molto, ma io non intendo sempre, anzi non intendo affatto in parecchi punti che mi paiono essenzialissimi. Per istinto, credo che abbia ragione il Maxwell, ma a dire la verità, credo che la sua teoria richieda un'elaborazione forse radicale, e la cosa che mi farebbe più piacere sarebbe che questa elaborazione trionfante fosse condotta a termine da Lei".

¹¹ Cfr. E. CESÀRO, «Sulle formole di Maxwell», Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, (4) 5 (1889, I semestre); idem, «Sur le pouvoir rotatoire magnétique», Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, (4), 5 (1889, II semestre), pp. 202-208.

¹² Per quanto riguarda la preparazione di tali lezioni, Alfredo Perna, suo assistente, scriveva (Cfr. A. PERNA, «Ernesto Cesàro», cit.): "Già aveva scritto la Cinematica in pochissimi giorni e tutto faceva sperare che il libro di Meccanica non sarebbe stato per nulla inferiore agli altri pubblicati da lui". I primi capitoli di tale libro sono conservati nel "Fondo Cesàro" presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli".

Anche Marcolongo era stato contattato da Salvatore Pincherle (1853-1936) per la successione di Ruffini, ma non aveva accettato pur ignorando le intenzioni di Cesàro. Fu pertanto assai lieto di potergli essere d'aiuto.

Si apriva così un ampio scambio di opinioni tra Cesàro e Marcolongo che partendo dall'esame delle tendenze e dei testi di meccanica allora più aggiornati, consentì loro di esprimere in maniera diretta le proprie posizioni nei confronti dei due problemi in quel momento più dibattuti in Meccanica: la questione dei fondamenti e la questione del formalismo, e, in forma più velata, i propri atteggiamenti nei confronti dell'approccio matematico alla Fisica.

Come è noto tra la fine degli anni settanta e gli inizi degli anni novanta dell'Ottocento alcuni trattati, essenzialmente la *Mechanik* di Kirchhoff (1877), la *Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt* di Mach (1883), i *Prinzipien der Mechanik* di Hertz (1894), le opere di Duhem, avevano profondamente modificato, la visione "newtoniana" in Meccanica. Così, ad esempio, la forza da concetto primitivo diveniva concetto derivato; rimanevano come concetti primitivi invece tempo, spazio e massa; un ruolo cruciale assumevano le considerazioni di invarianza delle leggi rispetto ai sistemi di osservazione.

Tra la fine degli anni novanta poi e gli inizi del nuovo secolo le difficoltà inerenti l'etere avevano spinto a riesaminare anche i concetti di spazio e tempo e le loro possibili interrelazioni: si erano già avute ad esempio le prime ipotesi sulla contrazione dello spazio ad opera di Lorentz e Fitz-Gerald, le analisi acutissime sul tempo e la congettura della velocità della luce come velocità limite di Poincaré. Proprio nel 1905 infine vedevano la luce i due articoli di Einstein sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, che segnavano la nascita della relatività ristretta, e ancora l'articolo di Poincaré sul moto degli elettroni.

Marcolongo seguiva con grande attenzione questi sviluppi e nel discorso inaugurale dell'anno accademico 1903-04, da lui letto il 4 novembre 1903 nella Università di Messina, diede un ampio resoconto, sia pure in forma divulgativa, dei risultati di Lorentz.

Nell'anno accademico 1905-06 egli stava trattando l'elettrodinamica. Non doveva comunque al momento dello scambio epistolare con Cesàro avere ancora notizia dei risultati ottenuti nel 1905 (vale la pena di osservare che il primo lavoro di Einstein sull'elettrodinamica fu presentato alla redazione della rivista il 30 giugno di quell'anno).

Quando Cesàro gli espose il 27 gennaio 1906 l'intenzione di utilizzare il *Treatise on Natural Philosophy* di Thomson e Tait per il suo insegnamento con l'obiettivo di poter costruire pian piano intorno ad esso "un corso a tendenza fisica, conducendo rapidamente gli studenti alla conoscenza delle applicazioni della Meccanica Razionale", Marcolongo precisò subito che a suo avviso si trattava di una scelta assai felice: egli stesso aveva tenuto ben presente l'opera nella scrittura dei suoi due volumi di Meccanica Razionale¹³.

Dopo qualche osservazione sull'organizzazione del materiale del *Treatise* e sulle questioni notazionali, espresse all'amico in maniera quasi scherzosa anche il criterio, dettato dal buon senso, cui egli si atteneva nell'imponente questione dei principi:

"Il solo desiderio di seguire il Thomson (un puro seguace di Newton per ciò che concerne i principii) mi dispensa dal dirti che io sono poco tenero dei nuovi (e non riusciti) tentativi di fondare la meccanica su nuove e indiscusse basi. Io faccio discutere matematici e filosofi e, troppo piccolo e incompetente per ardire di aprire bocca, mi accontento di stare a sentire. Ciò, ripeto, non toglie che io legga e

¹³ Cfr. R.MARCOLONGO, *Meccanica Razionale : I - Cinematica e Statica, II - Dinamica e principi di Idrodinamica*, Hoepli, Milano 1905.

rilegga i Prinzipien di Hertz e le recenti e bellissime Vorlesungen del Boltzmann".

Nella lettera di risposta del 3 febbraio Cesàro ribadì il suo "ideale di un corso di Meccanica con finalità fisiche", sottolineando che ciò che lo seduceva nel libro del Thomson era proprio quello stare della Matematica "per così dire, dietro le quinte", e nell'aggiunta scritta nel giorno successivo colse l'occasione per esporre anche il suo criterio sulla questione:

" (...) in fatto di Meccanica, sono anch'io "conservatore"; e penso che le analisi dissolventi che si vanno facendo da un pezzo in Meccanica ed in geometria debbano soltanto servire come lenti d'ingrandimento, per meglio scorgere i difetti del vecchio edificio, e porvi riparo senza guastarne l'armonia. Dico bene ?"

Il 6 febbraio Marcolongo, avendo trovato una certa concordanza di idee con Cesàro, si spinse ad affermare ancora scherzosamente:

"Tu dici benissimo riguardo ai principi. Io poi più che conservatore sono addirittura forcaiuolo (in meccanica solamente però)!"

Agli ulteriori consigli bibliografici di Marcolongo (il testo del Whittaker e quelli del Duhem) l'8 febbraio Cesàro ribadiva che "la tendenza inglese era quella che gli sorrideva".

Quasi certamente a questa precisa scelta culturale doveva contribuire l'antica formazione di Cesàro. Egli infatti giovane allievo dell'*Ecole des Mines* a Liegi, aveva seguito numerosi corsi di natura sperimentale ed applicativa¹⁴.

Le posizioni di Marcolongo appaiono invece più eclettiche: più che doti di grande originalità come Cesàro, possedeva valide qualità

¹⁴ Alcuni quaderni di appunti relativi a tali corsi sono conservati nel citato fondo Cesàro. Segnaliamo ad esempio quelli relativi ai corsi di *Chimie Organique*, *Chimie Industrielle*, *Mecanique Analytique*, *Exploitation des Mines*, *Architecture Industrielle*.

di sintesi¹⁵ e la sua formazione era priva di quegli spiccati elementi di natura sperimentale presenti in Cesàro; inoltre era già fortemente sensibile sia ad un approccio anche storico nello studio della Meccanica, sia ai problemi notazionali.

Nelle lettere del 6 e del 12 febbraio esprimeva così un sentimento di notevole stima verso le opere del Duhem, al quale lo accomunava l'interesse per la storia della Meccanica e avversione per la "indigesta zavorra tedesca" del Kraft, senza mancare tuttavia di riaffermare la sua predilezione per l'opera di Kelvin:

"Da noi poi, parlo in generale dei corsi che si fanno in molte università, si fa ancora della vecchia meccanica in buona parte aggirantesi sui famosi fili e i famosi giuochetti di statica e i problemini di Dinamica che Kelvin chiama di pura curiosità. Tu quindi che vuoi ispirarti agli inglesi sommi sei proprio sulla diritta via".

Alla sostanziale comunanza di posizioni tra Cesàro e Marcolongo, sia pure all'interno di diversi approcci culturali, sulla questione dei principi non fa invece seguito un'identità di vedute sulla questione del simbolismo fisico matematico.

Nel 1905 l'era delle grandi intuizioni di Hamilton espresse nelle *Lectures on Quaternions* (1853) e di Grassmann nella *Ausdehnungslehre* (1844) poteva dirsi senz'altro conclusa. Con l'affermazione delle nuove idee, già Maxwell aveva utilizzato per l'elettromagnetismo oltre che le notazioni in componenti cartesiane, una veste quaternionica nel *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873).

Tuttavia i nuovi sistemi notazionali erano ben presto apparsi di assai difficile uso. Agli inizi degli anni ottanta Gibbs aveva

¹⁵ Si confronti ad esempio il giudizio di Tricomi in «Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario», *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino*, (4), 1 (1962), pp. 1-119.

semplificato notevolmente le notazioni quaternioniche e presentato il suo sistema di notazioni vettoriali.

Dopo l'aspra polemica ingaggiata agli inizi degli anni novanta dai quaternionisti, le cui posizioni furono sostenute con vigore soprattutto da Tait, i nuovi metodi cominciarono a diffondersi rapidamente anche in seguito alla pubblicazione dell'*Electromagnetic Theory* di Heaviside (1893).

Si apriva però contemporaneamente la questione della scelta del "miglior" sistema di notazioni vettoriali e le proposte si moltiplicarono.

In Italia fervidi sostenitori dei nuovi metodi furono naturalmente gli studiosi dell'elettromagnetismo: essi furono presentati essenzialmente nella Teoria matematica del movimento dei corpi di Gian Antonio Maggi e nella *Teoria Geometrica dei campi vettoriali* di Galileo Ferraris.

Grande interesse suscitavano anche negli ambienti più attenti agli aspetti logici e simbolici della Matematica, soprattutto in Peano e, all'interno della sua scuola, particolarmente in Burali-Forti.

Marcolongo già nel 1901 aveva scritto una nota dal titolo *Teoria dei vettori* per la rivista "Le Matematiche Pure e Applicate" e aveva utilizzato i metodi vettoriali nei suoi due volumi di *Meccanica Razionale*, dapprima litografati, poi pubblicati proprio nel 1905 da Hoepli.

Il suo interesse per la questione andava crescendo e di lì a due anni avrebbe proposto insieme con Burali-Forti, allo scopo di unificare i sistemi di notazioni vettoriali esistenti, un proprio sistema notazionale¹⁶.

¹⁶ Cfr. C.BURALI-FORTI e R.MARCOLONGO, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*: Nota I, t. 23, (1907), pp. 324-328; Nota II, t. 24, (1907), pp. 65-80; Nota III, ivi, (1907), pp. 318-332; Nota IV, t. 25, (1908), pp. 352-375; Nota V, t. 26 (1908), pp. 369-377.

Così nella lettera del 1 febbraio 1906 esponeva a Cesàro i risultati delle sue prime esperienze nell'uso dei sistemi vettoriali:

" (...) poi debbo dirti (ma su ciò non oso nemmeno darti dei consigli) che io da vari anni faccio uso nel corso (e nei volumetti) del calcolo vettoriale e posso assicurarti che mi trovo contentissimo; debbo anzi all'uso costante di questo calcolo se ho potuto condensare in piccola mole tanta e tanta roba senza essere oscura. Se tu avessi tempo da perdere e volessi vedere con quanta semplicità ed eleganza si deducono le formule fondamentali della Cinem[atica] dei sistemi rigidi e volessi paragonare la mia deduzione con quella usuale, fondata sull'inevitabile quanto inutile corredo dei famosi nove coseni direttori; e con quanta speditezza si ottengono e le equazioni euleriane e le più generali del moto di un corpo; tu mi daresti pienamente ragione. Io mi sono preso il gusto di trattare negli esercizi, col calcolo vettoriale, alcune questioncelle (non te le cito perché mi accorgo che sto annoiandoti da un pezzo); ebbene in poche righe ho potuto riepilogare delle memorie di qualche pagina ! Questi metodi io li seguo anche in Fisica matematica nel corso di questo anno sulla elettrodinamica".

Cesàro aveva una conoscenza approfondita delle teorie quaternioniche che aveva anche rapidamente presentato nel suo *Corso di Analisi Algebrica*, edito presso i fratelli Bocca nel 1894; inoltre aveva personalmente lavorato e ancora lavorava ad un sistema di notazioni intrinseco sia nella geometria dello spazio, sia nelle geometrie non euclidee, i cui fondamenti e le cui larghe applicazioni aveva esposto nelle *Lezioni di Geometria Intrinseca*, edite in proprio nel 1896; tuttavia il 3 febbraio, coerentemente con l'approccio fisico che intendeva utilizzare, rispondeva a Marcolongo:

"Ti confesso però che probabilmente mi allontanerò da te appunto per l'uso dei vettori, perché mi sembra che, in un primo insegnamento, questi oscurino piuttosto i puri concetti meccanici (...) Ad ogni modo di ciò potremo discorrere uno di questi giorni; e non è

impossibile che la pratica stessa dell'insegnamento mi faccia mutar parere".

E Marcolongo il 6 febbraio ribatteva:

"Io spero poi che tu vorrai, col tempo, essere meno severo col calcolo vettoriale. Ridotte le cose al modo mio non solo gli studenti non trovano difficoltà, come mi ha convinto l'esperienza di cinque anni, ma si mettono presto al corrente ed al caso di applicarlo con profitto. È vero, verissimo che in Kelvin l'apparato matematico sta in seconda linea; ma ciò è solo un'apparenza; molte delle cose che Kelvin accenna (in carattere grasso) non sono affatto dimostrate e se si vogliono dimostrare il calcolo vettoriale conduce allo scopo con una incredibile speditezza".

Non è improbabile comunque che la posizione di Cesàro fosse anche influenzata proprio dal proliferare delle proposte di notazioni vettoriali.

Marcolongo non mancò nel corso di questo fitto dibattito di stimolare l'amico verso uno degli interessi che in lui stava maturando e che sarebbe finito poi per divenire predominante: la storia della matematica e, in particolare, della Meccanica. Aveva infatti da poco pubblicato le *Notizie sul "Discorso Matematico" e sulla vita di G.Mozzi*.

Nella lettera del 6 febbraio menzionava una "piccola cortese polemica storica" avuta col Duhem, ma anche su questo argomento non vi fu sintonia con Cesàro, che non riprese lo spunto.

Marcolongo, il 12 dello stesso mese, ripropose la questione esplicitando alcune sue critiche a Duhem, soprattutto per quanto concerneva "le nostre cose", ma ancora una volta Cesàro lasciò cadere l'argomento.

Qualche mese dopo l'intenso scambio epistolare del febbraio 1906, Cesàro ormai prossimo alla partenza per Bologna scriveva all'amico augurandosi di incontrarlo in Ottobre per poterne ancora utilizzare i consigli.

L'incontro non poté però avvenire: il 12 settembre di quell'anno egli moriva a Torre Annunziata nel vano tentativo di sottrarre il figlio Manlio alla furia del mare.

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Roma, 31 dicembre 1885

Mio carissimo Cesàro,

Dal Febbraio scorso in cui fui colpito da forte sciagura, io non mi sono fatto più vivo con te e se sei meco in collera devo darti ragione; ma eccomi, benché un poco tardi, a riparare al male fatto. Anzitutto ti auguro ogni sorta di felicità pel nuovo anno; e insieme a te la auguro alla tua famigliola¹ con tutto il cuore e con tutto l'affetto che tu puoi immaginare.

Non mi rallegro con te delle tue pubblicazioni²; profano ai segreti di quella scienza che con tanto amore coltivi e in cui tu sei già sì in alto mentre io debbo salirne ancora il primo gradino, poco ti gioverebbe una mia lode; accetta invece l'augurio sincero dell'amico per cose ancora più grandi.

Sapendo farti cosa grata ti do in breve mie nuove. In salute sto bene; quanto ai miei studi nell'anno scolastico che ora è passato segui il corso del Cerruti³ "sui Metodi di Integrazione nella Fisica Matematica" sul quale diedi l'esame che mi riuscì oltre ogni dire

¹ E. Cesàro aveva sposato il 27 aprile 1882 la nipote Angelina, dalla quale, alla data del 1885, aveva avuto tre figli: Amelia, Laura e Mario.

² Cesàro aveva pubblicato alla data del 1885 circa 80 memorie prevalentemente di aritmetica e di analisi.

(cfr. A. PERNA, «Elenco delle opere scientifiche del prof. E. Cesàro», in appendice a «Ernesto Cesàro», *Giornale di Matematiche*, 45 1907, pp. 320-324)

³ Valentino Cerruti (1850 - 1909), nel 1877 ottenne la cattedra di Meccanica razionale all'Università di Roma, dove restò fino alla sua morte.

bene; e così dicasi dell'altro esame sull'Analisi Superiore e sulle Funzioni Ellittiche.

Terminati così gli esami speciali, mi occorreva pormi a tutt'uomo a pensare alla mia tesi.

Mi proposi di sviluppare minuziosamente la risoluzione in numeri interi sulle equazioni indeterminate di 2° grado a due variabili⁴. Il lavoro laborioso oltre ogni dire mi è costato parecchi mesi di studio volendo sempre rendere sistematici i metodi noti ed applicarli costantemente ad esempi pratici; io l'ho già consegnata ed ora la stanno leggendo i commissari per l'esame di laurea se la leggeranno.

Spero in altra mia parlartene più diffusamente in quanto che mi sembra essere giunto ad alcuni risultati semplici e non privi di interesse.

Spero di essere finalmente libero dalle pastoie degli esami prima che termini il Gennaio prossimo. Ti do anche la buona nuova che il prof. Cerruti mi ha proposto per suo assistente. Si tratterà di fare le esercitazioni di Meccanica Razionale ai giovani del 1° Corso della Scuola d'Applicazione degli Ingegneri. La proposta fu accettata e sono in carica da circa un mese. Serve tanto per cominciare !

⁴ Per quanto riguarda l'argomento della sua tesi, Marcolongo nella sua autobiografia (cfr. R.MARCOLONGO, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, SIEM 1935, p. 8) scriveva: "Durante gli studi universitari, soprattutto per la grande influenza di G. Battaglini, mi sono prevalentemente occupato di analisi, di teoria dei numeri in relazione al problema della divisione del cerchio. La mia tesi di laurea riguardava appunto la teoria delle equazioni indeterminate di secondo grado ed il mio primo lavoro a stampa è un estratto di essa, in cui è, sembrami, da notare un procedimento, fondato sull'algoritmo delle frazioni continue, per la ricerca delle soluzioni della equazione di Legendre $x^2 + p^k y + P = 0$, quando sia nota quella dell'equazione analoga in cui k è sostituito da $k-1$." (cfr. R.MARCOLONGO, «Sull'Analisi indeterminata di 2° grado», *Giornale di Matematiche*, 25 (1887)).

E tu cosa fai ? cosa conti di fare ? Sono ansioso sapere tue nuove che tu, son certo mi darai colla solita cortesia.

Vorrei anche che mi informassi come potrei fare per procurarmi il tuo libro "Recherches Arithmetiques"⁵ e le Excursioni d'Aritmetica all'Infinito⁶ uscito ultimamente e dedicato al prof. Dino⁷. Vorrei inoltre abbonarmi al Mathésis⁸. Conosci le condizioni d'abbonamento ?

⁵ È da ritenersi che Marcolongo voglia riferirsi all'opera: E.CESÀRO, «Sur diverses questions d'arithmetiques», Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, (2), 10 (1883), pp. 1-352; cfr. pure *Opere scelte di E. Cesàro*, a cura dell'Unione Matematica Italiana, Roma, Cremonese, 2 voll. in tre tomi, vol. I₁ (1964), poiché molte delle ricerche effettuate da Cesàro in quegli anni erano state ivi raccolte.

⁶ Cfr. E.CESÀRO, «Excursions arithmétiques à l'infini», Annali di Matematica, (2), 13 (1885), pp. 235-351. In tale opera sono raccolte nove memorie, ripubblicate, in quello stesso anno, a Parigi per l'editore Hermann. I risultati qui presentati si ricollegano a quelli ottenuti nell'opera precedentemente citata «Sur diverses questions d'arithmetiques».

⁷ Nicola Salvatore-Dino (1843 - 1919), fu nominato professore di Geometria (prima proiettiva e poi analitica) all'Università di Roma nel 1882, da dove, nel 1886, passò a quella di Napoli. Era concittadino di Cesàro e, oltre ad essere stato suo docente in Roma, lo sostenne nei momenti più difficili in cui più acute furono le difficoltà economiche del giovane Cesàro. Insieme a Cremona ed a Battaglini intercesse perché venisse accolta la sua domanda di iscrizione all'Università di Roma; gli fece convalidare anche per Roma il sussidio già assegnato dal Municipio di Torre Annunziata per il soggiorno a Liegi quale studente dell'Ecole des mines. Infatti, in una sua lettera a Cesàro del 17 giugno 1883, il Dino nell'incoraggiarlo a venire a Roma, scriveva: "(...) Ecco: il Municipio di Torre Annunziata vi continuerà il sussidio di 1500 lire per un altro anno. E fra il Governo e l'Università noi (cioè Battaglini, Cremona, ..., io, etc.) possibile che non arriveremo ad ottenere un altro 1000 lire ! Saranno dunque 2500 lire, che per 8 mesi (Novembre - Giugno) vi potranno bastare." Quando Cesàro gli dedicò le *Excursions*, Dino così rispondeva in una lettera del 10 novembre 1885: "Caro Cesàro, ho ricevuto la vostre Excursions arithmetiques à l'infini. Vi ringrazio per l'affettuosa dedica".

⁸ Periodico diretto da J.Neuberg e P.Mansion e pubblicato a Liegi.

Ti sarò gratissimo di tutte queste informazioni. Voglio poi studiare i tuoi lavori non appena sarò un po' in pace.

Montesano⁹ sta bene e studia sempre ! non ho nulla da dirti da parte sua poiché egli stesso mi disse che ti avrebbe scritto.

Potremo lusingarci di vederti in Roma ?

La nuova della vittoria di Sbarbaro ti avrà certo fatto immenso piacere ! Non appena avrà pubblicato il giornale suo gradisci che te ne invii una copia ?

Intanto abbiti un abbraccio dal tuo

Roberto Marcolongo

⁹ Domenico Montesano (1863 - 1930), si laureò nel 1884 a Roma , dove fu condiscipolo di Marcolongo e Cesàro, e a soli 25 anni divenne professore straordinario di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Bologna. Nel 1893 passò alla stessa cattedra presso l'Università di Napoli, dove nel 1895 divenne ordinario.

2

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO (in Roma)

Torre Annunziata, 27 marzo 1892

Caro Marcolongo,

Mi affretto ad informarti che, circa due settimane fa, cioè pochi giorni dopo la morte del povero Padelletti¹, la nostra Facoltà si è riunita per provvedere alla "successione", ed ha proposto al Ministero

¹ Dino Padelletti (1852-1892) laureatosi a Pisa, vinse una borsa di studio all'estero che gli permise di studiare per quattro anni tra Zurigo, Dresda, Berlino e Londra. Nel 1877 divenne professore di Meccanica razionale all'Università di Palermo, dalla quale, nel 1879, passò a quella di Napoli, dove rimase fino alla morte.

che si bandisca il concorso, senza precisare se per ordinario o per straordinario.

La via è dunque aperta. Benché io molto apprezzi il Somigliana², non so spiegarmi le tue titubanze. Hai lavorato e bisogna bene che un giorno o l'altro ti cimenti in un concorso per sapere dai giudici competenti qual valore abbia l'opera tua in confronto di quella degli altri. Da parte mia mi asterrò da qualsiasi giudizio, sia perché probabilmente l'antica amicizia mi spingerebbe a formularne di troppo lusinghieri, sia perché mi ritengo quasi assolutamente incompetente nella materia che tu coltivi.

Purtuttavia, data, come tu mi riferisci, la possibilità di altro collocamento pel Somigliana, non credo di farti un vano augurio dicendoti che, l'anno venturo, sarò lieto di chiamarti mio Collega in questa Università.

Gradisci intanto una cordiale stretta di mano dal
Tuo amico
E. Cesàro

² Carlo Somigliana (1860 - 1955). Nel 1892 divenne professore di Fisica matematica a Pavia, e nel 1903 passò a Torino.

3

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Roma, 21 settembre 1892

Mio caro Cesàro,

Non t'ho fatto conoscere più nulla a proposito del concorso per la Meccanica a Napoli¹; né sarei tornato a disturbare i tuoi studi con un'altra mia se non credessi farti cosa grata dandoti una nuova che certamente ti riempirà di stupore.

Ai concorrenti per la cattedra suddetta; cioè Somigliana², Vivanti³, Gebbia⁴ ed io, si è venuto ad aggiungere, proprio all'ultimo momento, il Prof. Siacci⁵, ordinario di Meccanica Superiore a Torino. Lo stesso Ministero se ne è tanto meravigliato che ha creduto bene chiedere informazioni al suddetto professore.

Oggi stesso io ho avuta una lunga conferenza col Siacci, attualmente costì per il lavoro elettorale del proprio collegio. Egli con questo suo atto intende di non attraversare la carriera a nessuno (in qual modo, poi ?) che è deciso portarsi a Napoli, anche come straordinario, perché avrebbe subito il mezzo di tornare ordinario; e che è indotto a ciò per trovarsi più vicino a Roma ed esercitare più comodamente la professione di deputato e quella di professore. Dovrebbe per questo dare anche le dimissioni da militare! E' proprio che questa benedetta deputazione che accieca gli uomini più colti.

Perché allora non ha egli fatto la domanda di essere traslocato a Napoli ? Non avrebbe ritardato la carriera a nessuno di un anno; ed in un anno tu sai quante e quante cose possano accadere !

¹ Il riferimento è al concorso, a professore straordinario, presso l'Università di Napoli, per la cattedra di Meccanica Razionale, indetto il 16 aprile 1892 (cfr. «Bollettino Ufficiale della Pubblica Istruzione», anno XIX (1892), p. 717).

² Cfr. lett. 2, nt. 2.

³ Giulio Vivanti (1859 - 1949), divenne professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Messina, da cui, nel 1908, passò a Pavia (sucedendo ad E.Pascal). Infine nel 1924 passò alla neo fondata Università di Milano.

⁴ Michele Gebbia (1854 - 1929), laureatosi in ingegneria a Palermo nel 1875, nel 1907 divenne professore di Statica grafica nella Scuola di Ingegneria di Palermo e incaricato di Fisica matematica. Nel 1923 passò all'Università per la Meccanica razionale.

⁵ Francesco Siacci (1839 - 1907).

Intanto vedremo il primo caso di un professore ordinario che si mette in riga per occupare il suo bravo posto di straordinario ! I commissari che dovranno giudicare un socio nazionale della Accademia dei Lincei⁶ si troveranno in un bell'impiccio.

Rinunciamo adunque a qualsiasi idea di successo; se pure non mi decido a ritirarmi definitivamente dal concorso. Ne ho chiesto consiglio anche al Cerruti⁷ e da quanto mi dirà, prenderò una decisione. Prepara dunque, mio ottimo amico, i tuoi colleghi a questa buona nuova. Avrete di primo acchito, e senza colpo ferire, un professore deputato che profittando della vicinanza tra Roma e Napoli, starà più a Roma che a Napoli.

Grazie sentite, ad ogni modo, degli auguri fatti nella tua ultima e dei buoni consigli datimi dei quali serberò sempre grato ricordo. Del resto la mia, senza pensarci tanto, è stata una bella promozione; releghiamola nel mondo dei sogni e non pensiamoci più !

Ricevi una stretta di mano dal tuo

aff. mo

Roberto Marcolongo

⁶ Siacci era socio nazionale dell'Accademia dei Lincei dal 1890.

⁷ Cfr. nt. 3, lett. 1.

4

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
(in Roma)

Torre Annunziata, 4 ottobre 1892

Caro Marcolongo,

Non ho potuto scriverti subito perché sono stato, di questi giorni, assai affaccendato per cambiamenti di domicilio^(*). Ancor oggi non posso scriverti che in gran fretta per dirti che la notizia da te datami, come ha sbalordito me, ha sbalordito tutti. Non credo che ci sia nulla da fare per far cambiare i propositi del Prof. Siacci.

Tuttavia il consiglio che mi permetto di darti è questo: non ritirarti che all'ultimo momento, cioè quando la Commissione si riunirà per l'esame dei titoli. Possono sorgere tante complicazioni, che a nessuno è dato prevedere.

Non ti sei informato dei possibili successori del Betti¹ ? Credi tu che a quel posto possa andare il Cerruti ? Questa non è che una mia fantasticheria; ma, se si realizzasse, si semplificherebbe tutto, perché, naturalmente, il Siacci preferirebbe rimanere a Roma, e tu staresti meglio qui a Napoli, per tante ragioni, e specialmente per la certezza di ottenere l'ordinariato fra tre anni.

Augurandoti che le mie fantasticherie piglino corpo e chiedentoti scusa della cacografia, mi dico

Tuo dev. mo

E. Cesàro

P.S. Ti sarò obbligato se mi terrai informato delle possibili novità.

(*) da Torre a Portici. Se dovessi venir qui a Novembre, mi metto a tua disposizione per trovarti una casa. A Portici se ne trovano a miglior mercato che a Napoli. Ma di questo ripareremo.

¹ Enrico Betti (1823 - 1892) laureatosi a Pisa nel 1846, nel 1857 divenne professore di Fisica matematica all'Università di Pisa, dove rimase fino alla morte.

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
IN PORTICI

Roma, 29 ottobre 1892

Caro Cesàro,

Eccoti i risultati dei due concorsi di Pavia e Napoli¹.

Pavia - Fisica Matematica.

Somigliana 1° con 48 punti

Marcolongo 2° con 40 punti

entrambi eleggibili con cinque sì.

Le conclusioni sono state già approvate dal Consiglio Superiore.

Per la Meccanica Razionale a Napoli la commissione ha creduto di dover escludere all'unanimità il Prof. Siacci:

1° perché la domanda non era fatta nella debita forma,

2° perché non era stata fatta in tempo,

3° perché non era documentata.

Se il suddetto professore avesse fatto tutto ciò, o, in altre parole, se avesse concorso la Commissione lo avrebbe dichiarato eleggibile e gli avrebbe assegnato il 1° posto.

Discutendo e vagliando seriamente i titoli degli altri concorrenti ha posto:

¹ Il concorso all'Università di Pavia era per professore straordinario alla cattedra di Fisica matematica; esso fu indetto l'8 giugno 1892 (cfr. «Bollettino Ufficiale della Pubblica Istruzione», anno XIX (1892), p. 106).

- 1° Somigliana con 47 punti
- 2° Marcolongo con 43 punti
- 3° Gebbia con 33 punti

Il Vivanti si era ritirato dal concorso.

Inoltre la Commissione prevedendo che il Somigliana potesse non accettare il posto a Napoli ha proposto che in tal caso venga senz'altro nominato io.

Il Consiglio Superiore nella tornata di ieri l'altro ha approvato le conclusioni della Commissione mettendo in special discussione la faccenda Siacci; ed ha trovato ogni cosa regolarissima, anzi su proposta dell'illustre Beltrami² è tornata a raccomandare la mia nomina, ammessa la rinuncia del Somigliana.

Resta un ultimo punto oscuro: l'approvazione del ministro; è vero che prima di prendere una deliberazione contraria a due voti di persone tanto competenti ed autorevoli egli ci penserà su; ma ora son diventato così sfiducioso e pessimista che niente più mi fa meraviglia.. Ora è certo che il Somigliana resterà a Pavia; se quindi il ministro approva, non vi è più dubbio sulla mia nomina; ma torno a ripeterti io ancora mi ritengo tutt'altro che certo.

Di certo, per ora, si ha solo questo che io esco con onore da due primi concorsi e abbastanza seri.

Dato che tutte le cose procedono regolarmente, io sono certo che tu ne sarai lieto; credi tu che la facoltà di costà vedrebbe di buon occhio la mia venuta ?

² Eugenio Beltrami (1835 - 1900) fu nominato senza concorso professore straordinario di Algebra e Geometria analitica all'Università di Bologna. Tenne successivamente la cattedra di Geodesia a Pisa (1863-66), di Meccanica a Bologna (1866-70) e di Roma (1873-76), di Fisica matematica e Meccanica superiore a Pavia (1876-91). Si stabilì poi definitivamente a Roma, dove succedette al Brioschi nella presidenza dell'Accademia nazionale dei Lincei.

Scusa intanto la fretta con cui è scritta la presente che dirigo a Napoli non conoscendo il tuo indirizzo a Portici.

Se io sarò nominato, sarò a Napoli probabilmente nella seconda metà di Novembre; e puoi star certo che verrò subito ad abbracciarti.

Una forte stretta di mano dal tuo

aff. mo

R. Marcolongo

P.S. Per quest'anno pare che non si decida nulla riguardo al Concorso per la Proiettiva³ non potendo (o non avendo voluto) radunarsi la Commissione prima che il Consiglio Superiore termini i suoi lavori.

³ Trattasi del concorso, a professore straordinario, presso l'Università di Napoli, presso la cattedra di Geometria proiettiva con disegno, indetto l' 8 giugno 1892 (cfr. «Bollettino Ufficiale della Pubblica Istruzione», anno XIX (1892), p. 106)

6

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(IN NAPOLI)

Roma, 6 Maggio 1893

Mio caro Cesàro,

Mi rivolgo una volta ancora alla tua amicizia, certo che non hai completamente obliato il tuo vecchio amico; e che farai quanto è in te perché il mio avvenire non venga del tutto compromesso.

Perdona adunque questo nuovo incomodo che ti arreco.

È inutile ora che io torni a farti la storia dell'ormai famoso concorso, finito per me in una vera e disastrosa sconfitta. La battaglia

essendo perduta irrimediabilmente mi tocca pensare alla ritirata e purtroppo ancor questa mi viene tagliata dal Professore Siacci al quale, veramente, non so che danno abbia io mai fatto per vederlo così ostinato a farmi del male. Siamo a Maggio; tra poco si adunerà il Consiglio Superiore; ed egli ancora non si decide a restare a Torino o a venire a Napoli; né, in conseguenza, fa conoscere nulla alla Facoltà di Torino.

Tu e i tuoi colleghi di Napoli potreste farlo decidere senz'altro ad esigere che venga fatto il decreto che nomina lo [sic] Siacci professore a Napoli; così egli non potrà più tergiversare, e dovrà abbandonare Torino; e così sarà aperta un'altra via per chi lavora modestamente ed ha il nobile desiderio di ottenere una posizione in qualche università.

A me pare che la Facoltà di Napoli potrebbe compiere questo atto che a me parebbe naturalissimo. Ho forse io fatto qualche male perché essa debba rendermi malagevole l'avvenire? Io nulla chiedo per me; una volta venuto via il Siacci da Torino, non sono mica sicuro di andare io a Torino; chi sa quanti altri, assai più di me degni, aspireranno a quella cattedra; ma ad ogni modo si renderà certamente vacante qualche altra cattedra¹; insomma io non vedrei, in tale ipotesi, lontano il mio collocamento.

Ma se voi non fate decidere lo Siacci prima che termini l'anno scolastico e non lo ponete nella necessità di dire a tempo dove vuol restare, io vedo compromesso non solo questo altro anno e chi sa quanti altri ancora. È vero che di ciò nulla può interessare allo Siacci; ma potete voi altri permettere indefinitamente che per i suoi comodi venga ritardato senza alcun costrutto l'avvenire dei giovani?

¹ Col passaggio di Volterra a Torino, si rese vacante la cattedra di Meccanica razionale all'Università di Pisa, dove però Marcolongo non riuscì ad insediarsi, essendo anche "riuscite vane le sollecitazioni di F. Brioschi e di L. Cremona", come egli stesso dice nella sua autobiografia.

Ebbi la fortuna di parlare qui col Prof. Dino ed egli riconobbe giusti i miei lamenti e da parte sua mi promise che avrebbe fatto il possibile onde entro il Maggio fosse definita questa dolorosa faccenda. Io mi raccomando caldamente a te; tu, per tua buona ventura, ottimo Cesàro, sei giovane, ed occupi già un posto eminente nella scienza²; puoi dunque meglio comprendere le ansie di chi muove ora appena i primi passi e che non può raccomandarsi a te che per l'antica amicizia; e poi, purtroppo mi faccio vecchio e le ultime disillusioni hanno infiacchito la mia fibra e questo anno non ho lavorato coll'ardore degli anni scorsi. Capisco che questa è una degna punizione per l'aver troppo sperato e dell'aver mirato troppo in alto; ma io non ho rimorsi e se forse avessi seguito il mio primo impulso e mi fossi senz'altro ritirato dal concorso mi sarei risparmiati tanti dolori.

Non oso sperare che tu risponda a queste mie postume querimonie, ma spero però che tu faccia sentire la tua voce in facoltà, acciò cessi definitivamente uno stato di cose che non produce vantaggio ad alcuno.

E ringraziamenti dal profondo del cuore credimi coll'antico affetto sempre tuo

Roberto Marcolongo

² Cesàro, nel 1886, mediante concorso, era diventato professore ordinario di Algebra complementare all'Università di Palermo, e, nel 1891 passò all'Università di Napoli come ordinario alla cattedra di Calcolo infinitesimale. Aveva inoltre già pubblicato, alla data di questa lettera, circa 190 memorie.

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 17 aprile 1899

Caro Cesàro,

Dopo tanti anni¹, dopo tante vicende da me sofferte², e anche, purtroppo, dopo tante sventure mi rifaccio vivo con te che forse mi avrai del tutto dimenticato.

Al Professore Cesareo, ordinario di letteratura italiana nella R. Università di Palermo, fu rimesso un libro "Calcul de Généralisation" con una dedica.

Tornando il suddetto professore costì, ci narrava il caso occorsogli ne' poteva capacitarsi di un così strano invio. Io capii subito l'equivoco, inesplicabile al professore Cesareo che non sapeva ci fosse un matematico di nome assai simile al suo. Avuto il libro dal Professore Cesareo presi impegno di fartelo recapitare al più presto; ciò che faccio profittando della venuta costà del comune amico Professore Vivanti³.

¹ Marcolongo si rivolge nel medesimo modo anche a Federico Amodeo (1859 - 1946), libero docente di Geometria all'Università di Napoli, in una cartolina del 4 maggio 1900: "Caro Amodeo, dopo tanti e tanti anni che io non mi son fatto vivo con te, ...". Quindi le "vicende" e le "sventure", di cui parla più avanti Marcolongo, condizionarono molto la sua possibilità di curare i rapporti interpersonali con i suoi colleghi. Inoltre esse influenzarono negativamente anche la sua attività scientifica. Infatti egli, per più di tre anni, dal 1897 al 1900, pubblicò una sola memoria.

² Marcolongo si riferisce molto probabilmente sia alle sue vicende concorsuali, sia a quelle familiari, poiché aveva perso la moglie.

³ Cfr. nt. 3, lett. 3.

Nello stesso tempo ti fo omaggio di un piccolo lavoretto⁴ pronto per le stampe da più tempo e che le grandi sventure da cui sono stato colpito, e che forse ti saranno note, non mi avevano consentito di pubblicare prima.

Intanto dovendo dedicarmi alle mie bambine⁵, per molto tempo, per parecchi altri anni forse, io debbo dire addio agli studi favoriti e da me sempre tenacemente seguiti se non con successo, certo con molta fermezza.

Ma purtroppo così ha voluto il mio destino.

Sta sano e ricordati qualche volta di un tuo vecchio condiscipolo che ha sempre seguito con interesse e con ammirazione la tua splendida carriera.

Aff. mo
Roberto Marcolongo

⁴ Si tratta probabilmente di: R.MARCOLONGO, «Spostamento di una figura di forma invariabile e composizione di moti finiti», Atti dell'Accademia Peloritana di Messina, 13 (1899), che è l'unica memoria pubblicata dal Marcolongo nel periodo che va dal 1897 al 1900.

⁵ Marcolongo aveva quattro bambine, notizia che si ricava da una cartolina postale da lui scritta ad Amodeo il 15 maggio del 1900.

8

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli 28 aprile 1899

Caro collega,

Dolente di non essermi trovato in casa quando sei venuto, ti scrivo per ringraziarti del dono della tua interessante memoria¹, ed anche per pregarti di dirmi che cosa debbo fare del libro di d'Oltremare², che mi hai lasciato. Supponevo che saresti ritornato, ma poichè non mi hai dato il piacere di rivederti, mi decido a scriverti. Spero di potere, fra poco, mandarti qualche mia noticina, quantunque da un pezzo mi sia allontanato dai miei studi prediletti per darmi tutto allo studio dell' inglese, onde cercare "la mia via" per l' Australia³. A 40 anni, e con 8 figli !

Credimi, con una cordiale stretta di mano, tuo dev. mo

E. Cesàro

¹ Cfr. nt. 4, lett. 7.

² G. Oltremare, professore all'Università di Ginevra, corrispondente di E. Cesàro.

³ Cesàro, per un certo periodo, spinto dalle esigenze economiche familiari, tentò di andare ad insegnare all'estero sperando di ottenere una maggiore retribuzione. Da una delle minute di lettere ai familiari, trovata nel "Fondo Cesàro", si legge che egli prendeva lezioni d'inglese.

9

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 5 luglio 1900

Carissimo Cesàro,

Mercoledì 11 corrente io sarò di passaggio per costà, recandomi a Roma e poscia a Tivoli a passare le vacanze. Mi tratterrò tutto il giorno; cosa che in tanti viaggi non ho mai fatto. Avrei

vivissimo piacere, dopo tanti anni, di rivederti e rubare alle tue occupazioni, ai tuoi studi appena un quarto d'ora.

La mia visita ti disturba ? E allora passi per non detto; se no, ti prego caldamente a voler essere tanto gentile di scrivermi un rigo costi e farmi conoscere dove e in quale ora senza tanto tuo incomodo io potrei vederti.

Sono più di dieci anni che non ci vediamo; quante e quante disgrazie mi sono capitate in questi ultimi anni tu forse non saprai !

Intanto, nella speranza di un tuo riscontro, credimi
con antico ed immutato affetto, aff.mo

R. Marcolongo

10

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESARO
(in Napoli)

Messina, 6 luglio 1901

Carissimo Cesàro,

Mi permetto farti omaggio di una copia delle mie lezioni litografate di *Meccanica Raz[ionale]*¹.

È un lavoro senza pretese, fatto per comodo degli studenti, nel quale tu non devi trovare nulla o quasi di nuovo o di originale. Non oso sperare che tu leggerai o sfoglierai queste mie lezioni; ma se mai ti accadesse di gettarvi su uno sguardo e volessi soccorrermi dei tuoi consigli, io te ne sarò gratissimo, perché è mio vivissimo desiderio apprendere, perfezionare e correggermi.

¹ Cfr. R.MARCOLONGO, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Anno scolastico 1900-1901, Tipografia D'Amico, Messina, (1901). La copia da noi ritrovata nel "Fondo Cesàro", reca la seguente dedica: "All'illustre Professore E.Cesàro in pegno di antica amicizia e di calda ammirazione offre rispettoso, R.Marcolongo".

Ho fatto il possibile per riuscire non troppo prolisso ma nello stesso tempo completo e chiaro; ed ho cercato bensì tener conto delle ultime eccellenti pubblicazioni del Koenigs² e del Klein³ e soprattutto delle lezioni del compianto Beltrami e dei continui e preziosi ammaestramenti del Cerruti, al quale, come tu ben sai, io tutto debbo.

Così vedrai che tutte o quasi le teorie che poi debbono essere svolte nei corsi speciali di Fisica-Matem[atica] o di Meccanica Superiore trovano un posticino nelle mie lezioni: anzi sono dolente di non essermi potuto estendere come sarebbe necessario sulla meccanica dei corpi continui (in cui tu pure sei stato posto a contributo, come facilmente ti accorgerai). Ma purtroppo ora tra vacanze ufficiali e abusive il numero delle lezioni va sempre più assottigliandosi !

Io ho posto ogni cura nello sviluppare queste lezioni in cui fo anche un uso continuo sì, ma non eccessivo della teoria dei vettori; io stesso le ho trascritte sulla carta litografica quindi le imperfezioni, gli errori (e Dio sa quanti ve ne sarà !) sono tutti da imputarsi a me solo.

Imperfetta come è ho creduto tuttavia di fartene un omaggio per mostrarti sempre la viva memoria che ho di te e per mostrarti ancora che, dopo un triennio di stentata vita di famiglia, ora accomodate tutte le faccende, io ho potuto rimettermi a lavorare, se non proficuamente, certo coscienziosamente.

Tu ad ogni modo, sempre buono ed indulgente verso di me e le mie povere cose, vorrai accettare questo umile dono e compatirmi.

Se a settembre mi recherò in Roma, e se non ti recherò troppo disturbo, verrò a salutarti.

Abbiti intanto un affettuoso saluto dal tuo aff.mo R. Marcolongo

² Gabriel Koenigs (1858 - 1931). Marcolongo si riferisce alle opere di Koenigs: *Leçons de cinématique*, Hermann, Paris, (1895-1897).

³ Christian Felix Klein (1849 - 1925).

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 22 luglio 1901

Carissimo Collega,

Scusami se ho tardato tanto a ringraziarti del tuo gentile ed importante dono¹. Avrei voluto scriverti un po' più a lungo in proposito; ma gli esami e certe cure di famiglia, non mi concedono un momento di riposo. Del resto potremo discorrere con più agio in Settembre, soprattutto se vorrai esser tanto gentile da disporre le tue cose in modo da permettere ai tuoi ex-condiscipoli di passare una giornata in tua compagnia. Credimi sempre, con una cordiale stretta di mano,

Tuo dev. mo Collega

E. Cesàro

¹ Cfr. nt. 1, lett. 10.

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 16 dicembre 1902

Carissimo Cesàro,

ti scrivo, dopo tanto tempo, con l'animo trepidante.

Vorrai tu prestare benevolmente ascolto e compatire un tuo vecchio condiscipolo ?

Saprai già, a quest'ora, i risultati del concorso di meccanica razionale a Genova; riuscì 1° Tedone¹ all'unanimità con 46; 2° Almansi² all'unan[imità] con 45; 3° il De Francesco³ a sola maggioranza con 40; 4° il Gebbia pure a magg[ioranza] con 39; 5° il Burgatti⁴ con 38 e a magg[ioranza].

Forse non saprai questo. Il Prof. Siacci ha tanto fatto che è riuscito a farmi escludere dalla Comm[issione] giudicatrice del concorso e farmi sostituire prima col Caldarera⁵ e poi, questi

¹ Orazio Tedone (1870 - 1922), laureatosi alla Scuola Normale Superiore di Pisa, nel 1889 fu nominato professore di Analisi Superiore all'Università di Genova dove, nel 1902 passò per concorso alla Cattedra di Meccanica Razionale, avendo anche l'incarico della Fisica Matematica. Nel 1922 fu chiamato all'Università di Napoli; ma venendo in tale città per predisporre il suo trasferimento, fu travolto da un treno nella stazione di Pisa.

² Emilio Almansi (1869 - 1948), laureatosi in matematica all'Università di Torino, fu ivi assistente di Volterra e nel 1899 libero docente di Meccanica Razionale e di Fisica Matematica. Dal 1903 al 1910 fu professore all'Università di Pavia, e poi, fino al 1922, professore di Meccanica a Roma.

³ Domenico De Francesco divenne coadiutore straordinario alla cattedra di Meccanica razionale (era assistente di Siacci) all'Università di Napoli nell'a.a. 1895-96. Rimase tale, anche dopo la morte di Siacci, fino all'a.a. 1922-23, divenendo prima professore privato con effetti legali, e poi libero docente. Abbiamo notizia di 10 sue memorie (delle quali una apparsa sui "Mathematische Annalen") pubblicate tutte tra il 1896 e il 1903, riguardanti essenzialmente problemi di meccanica in uno spazio a curvatura costante.

⁴ Pietro Burgatti (1868 - 1938), laureatosi all'Università di Roma, vi rimase per parecchi anni come assistente e libero docente di Analisi infinitesimale e Meccanica. Nel 1908, per concorso, successe a Marcolongo all'Università di Messina, dalla quale, nello stesso anno, si trasferì a Bologna.

⁵ Francesco Caldarera (1825 - 1920) fu professore di Meccanica razionale all'Università di Palermo.

dimessosi, col Levi-Civita⁶. Questa informazione mi è stata data dal Cerruti e dal venerando Cremona.

Non saprai forse tutte le pressioni fatte sul ministro perché, dichiarando meglio un articolo del regolamento nuovo, non assoggettasse gli assistenti all'esperimento dell'esame orale.

Io non voglio nemmeno permettermi di discutere l'operato ed il risultato ottenuto dalla Comm[issione], così diverso dal mio giudizio, tranne che per i due primi. Ti dico solamente che il Cerruti non aveva esitato a dare (nel referendum) uno dei primissimi posti al Burgatti i cui lavori di meccanica, benché in piccolo numero, sono certo originalissimi. Non è di questo che io voglio parlarti.

In Roma correva insistentemente questa voce: il S[iacci] si varrà della eleggibilità ottenuta dal De Francesco per farlo nominare costà, intendendo ritirarsi dalla cattedra di meccanica razionale, per tenere, come ordinario, quello di meccanica superiore. E ciò per l'applicazione dell' Art. 43 dell'attuale regolamento⁷.

E ti prego di ben riflettere che in questo caso l'Art. stesso non è, parsoni, applicabile. Infatti questo articolo parla di nomine a straordinario di coloro che ottennero eleggibilità (e non oltre il terzo) per una cattedra di ordinario. Ma so per prova e per triste esperienza che a questo mondo si fa tutto ciò che si vuole !

Ora, caro Cesàro, pare a te che tutto ciò, dato pur che sia vero, sia regolare ? e che una cattedra così importante come quella di Napoli possa essere data così, quasi di nascosto, e a chi è risultato terzo in un concorso e a ben sei punti di distanza dal primo e a cinque dal secondo ?

⁶ Tullio Levi-Civita (1873 - 1941), a soli 24 anni divenne professore di Meccanica razionale all'Università di Padova nel 1897, dove rimase fino al 1919, anno in cui fu chiamato all'Università di Roma, prima come ordinario di Analisi superiore e poi di Meccanica razionale.

⁷ Cfr. nt. 8 dell' Introduzione.

Dato che il Siac[ci] intendesse lasciare la cattedra, ciò che non credo, io non posso certo sperare di vedere accolta una mia domanda di trasferimento costà; ma voglio almeno sperare che la Facoltà vorrà provvedere con un concorso al quale io volentieri mi assoggetterei.

Ed è per questo atto di giustizia che a te caldamente mi raccomando: è un atto di giustizia che io chiedo e mi permetto rammentarti che fu con concorso che si provvide alla cattedra di Proiettiva quando v'era lotta tra il Montesano ed il Del Re⁸; e parimenti con concorso alla cattedra di Geodesia.

Io non voglio, né posso far confronti, sempre odiosi; e tu sai quanto io valga poco: ma rammenterai che nel concorso di dieci anni or sono, per Napoli, io risultai secondo con 43; nel concorso del 97 per Padova risultai primo con 48 e da allora in poi, benché ... provato dalla sventura, ho seguitato modestamente, ma indefessamente a lavorare e per la scienza e per la scuola.

Perdona questa lunga lettera e lo sfogo confidenziale che io ho fatto con te, memore dell'affetto e della bontà che sempre hai avute per me.

E se tu puoi darmi una parola di conforto, ti prego, a non volerla negare al tuo vecchio amico.

Con stima ed affetto grandissimi
credimi aff.mo

Roberto Marcolongo

⁸ Alfonso Del Re (1859 - 1921), laureatosi a Napoli, fu nominato professore di Geometria analitica e proiettiva all'Università di Modena, da cui si trasferì a quella di Napoli nel 1899 per la cattedra di Geometria descrittiva e proiettiva.

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 28 dicembre 1902

Caro Collega,

Spero vorrai scusarmi se ti rispondo con ritardo. Sono stato occupatissimo per aver dovuto conciliare il mio dovere di professore con quello di giurato; e mi son toccati, per giunta, gravi dispiaceri per faccende domestiche. Ho poco tempo disponibile, per ora, e lo impiego per dirti che quanto tu temi non accadrà se, nell'eventualità a cui accenni, ti affretterai a far domanda di trasferimento, accompagnata dalla dichiarazione di esser pronto al concorso. Questa fu la via da me seguita¹, ed è la sola che io sappia consigliarti. Tengo nondimeno a dirti qualche cosa che ti recherà non poca meraviglia; ed è che fra gli aspiranti vi potrebbe essere anche il sottoscritto, dal quale, però, nulla hai da temere, giacché ti prometto che mi ritirerei all'ultimo momento se le mie aspirazioni fossero per danneggiare le tue, o quelle di qualsiasi altro legittimo pretendente. Mi sono spiegato? Manterrei la mia candidatura solo nel caso che il ritirarla dovesse giovare al trionfo di aspirazioni non giustificate. Riserbandomi di darti, in seguito, più ampii chiarimenti, colgo l'occasione per augurare a te ed ai tuoi buon principio d'anno, e per riconfermarmi

Tuo aff. mo Collega

E. Cesàro

¹ Cesàro si riferisce al suo trasferimento da Palermo a Napoli.

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 7 gennaio 1903

Carissimo Cesàro,

ho ricevuta la tua cartolina e ti ringrazio affettuosamente. Farò quanto tu mi consigli appena sarò certo che si trama qualche cosa di concreto. Posso assicurarti che il Dini¹, il Cerruti ed il nostro venerato ed illustre Cremona faranno il possibile perché non siano commesse ingiustizie.

A me poi pare avere perfettamente compreso il tuo pensiero; che se per poco io potessi lontanamente sospettare di ledere le tue aspirazioni, mi rincantuccerei nel più buio angolo della terra.

Spero tu avrai ricevuto la mia nota di matematica russa e la recensione della meccanica del Cellerier². Da vari mesi studio il russo e conto farmi l'interprete presso di noi di tutta la importante e odierna produzione matematica russa riguardante la teoria del giroscopio³.

Ora sto lavorando alla risoluzione completa del caso del Goriaciovff mediante funzioni teta a due argomenti⁴.

¹ Ulisse Dini (1845 - 1918), si laureò nel 1864 all'Università di Pisa, dove, nel 1866, a soli 24 anni, fu nominato professore di Geodesia, passando dopo poco alla cattedra di Analisi.

² Cfr. R. MARCOLONGO, «Le cours de Mécanique de Ch. Cellerier», Enseignement Mathématique, 4 (1902), pp. 1-7.

³ Come è noto essa affronta i problemi inerenti il moto di rotazione di un solido attorno a un suo punto fisso. A tale argomento Marcolongo dedicò un totale di 11 articoli.

⁴ Cfr. R. MARCOLONGO, «Osservazioni intorno alla Nota del sig. Kolossoff: Sur le cas de M. Goriatchoff de la rotation d'un corp pesant autour d'un point fixe»,

Ti rinnovo i più caldi auguri pel nuovo anno per te e per tutta la tua famigliuola.

Un saluto e ringraziamenti affettuosi
dal tuo aff.mo

Roberto Marcolongo

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 16 (1902), pp. 349-357. In tale memoria Marcolongo riassume due lavori dei due matematici russi citati nel titolo sul problema del giroscopio pesante. La Nota di Kolossoff, apparsa nello stesso volume XVI dei Rendiconti, non era altro che un estratto di una lettera di Kolossoff a Marcolongo. Il caso che Kolossoff analizza nella sua lettera, era stato per la prima volta trattato da M. Goriatchoff (cfr. M.GORIATCHOFF, «Del modo di un corpo solido pesante intorno ad un punto fisso nel caso in cui $A=B=4C$ », Società di Mosca, (1899)). A proposito di tale memoria lo stesso Marcolongo scriveva nella sua autobiografia: "Una nota del sig. Kolossoff mi ha condotto a studiare alcuni casi particolari del moto di un giroscopio pesante considerati da due matematici russi, Goriatchoff e Tchapligne e di cui faccio lo studio cinematico e ottenendo, in modo diverso dal Kolossoff, la soluzione con quadrature iperellittiche." Dette p, q, r le componenti della velocità angolare, e $\gamma, \gamma', \gamma''$ i coseni degli angoli che l'asse z forma cogli assi principali d'inerzia; considerate le equazioni di Eulero e di Poisson, il problema consiste nella ricerca di un quarto integrale (gli altri tre sono conosciuti) indipendente dal tempo, la cui conoscenza riconduce il problema alle quadrature. Questo vale per ogni giroscopio pesante: Goriatchoff ricerca se è possibile che questo quarto integrale abbia la forma $p^2 + q^2 = c^{\frac{4}{3}} p^{\frac{2}{3}}$, in cui c è una nuova costante. Marcolongo risolve in modo differente dal Kolossoff questo problema, ed inoltre giunge ad esprimere $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ per mezzo di funzioni teta di due argomenti dipendenti linearmente dal tempo.

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Piedimonte Etneo, 30 agosto 1904

Caro Cesàro,

ho ricevuto qui in campagna la tua poderosa memoria¹; ti ringrazio della buona, affettuosa memoria che serbi di me. Io conservo sempre per te, insieme alla più calda ammirazione pel tuo forte ingegno, un memore affetto e riconoscenza, non certo turbata, ti prego di crederlo, da nessun avvenimento². Quante circostanze in questa benedetta carriera !

Hoepli ha già finito di stampare il primo dei volumetti doppi del mio Corso di Meccanica Razionale contenente la Cinematica e la Statica; si stamperà subito il secondo volumetto contenente Dinamica

¹ La vaghezza del riferimanto non ci permette di individuare il titolo della memoria.

² Marcolongo si riferisce sicuramente alla delibera della Facoltà di Scienze Matematiche che gli fu contraria e che fu favorevole al Siacci. Marcolongo, in seguito a tali avvenimenti, perse completamente la speranza di venire all'Università di Napoli. Infatti anche dopo la morte di Siacci (il 31 maggio 1907) egli non credeva si sarebbe potuto realizzare questo suo desiderio. A tale proposito è eloquente la cartolina postale del 5 giugno 1907 da lui scritta a Federico Amodeo: "Farò domanda di trasferimento ma nulla spero; rammento bene come fui trattato tre anni or sono. Se sarà necessario (ho scritto a tutti di costà) farò una gita anche costà; ma a che pro' ? Oramai mi perseguita, per Napoli, una specie di iettatura ! (...) Spero che le enormità di tre anni or sono non sia più possibile commetterle; ma ti ripeto, per me, forse avrei da sperare qualche cosa di invano". Marcolongo fu chiamato a tenere la cattedra di Meccanica razionale all'Università di Napoli solo nel 1908.

e primi principii di Idromeccanica³. In tutto il corso, oltre le immediate applicazioni e l'uso costante del Calcolo vettoriale, sono proposti e risolti circa 250 esercizi. Da questo lato almeno la modesta operetta potrà essere utile agli studenti; essa è frutto di non poche fatiche e mi ha del tutto assorbito in quest'anno !

Appena completa sarà mia cura di fartene omaggio; che tu vorrai accettare in pegno dell'antico ed immutato affetto del tuo aff. mo

R. Marcolongo

³ Cfr. R.MARCOLONGO, *Meccanica razionale. I - Cinematica e Statica; II - Dinamica e principi di Idromeccanica*, Hoepli, Milano (1905).

17

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 1905

Vivissimi ringraziamenti e cordiali saluti da

E. Cesàro

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 27 maggio 1905

Caro Cesàro,

mi permetto presentarti il Dr. Oswald Veblen¹, assistente alla Facoltà matematica di Chicago. Egli fa un viaggio in Europa e mi ha manifestato il suo vivo desiderio di esserti presentato. Però mi permetto di scriverti queste due righe anche per ricordarmiti cordialmente ed affettuosamente.

Aff. mo

R. Marcolongo

¹ Oswald Veblen (1880 - 1960), divenne professore all'Università di Princeton nel 1905, passando poi nel 1932 all' Institute for Advanced Study. Si occupò di molti aspetti della geometria, principalmente di topologia e geometria differenziale. Il suo primo lavoro (pubblicato nel 1904) dava una assiomatizzazione della geometria euclidea differente da quella presentata da Hilbert nei *Grundlagen der Geometrie* (1899), perché basata solo su due concetti primitivi, "point" e "order" (di punti su una retta), come era stato inizialmente suggerito da Pasch e Peano. Dopo quest'inizio dedicato al metodo assiomatico, i suoi interessi si ampliarono fino ad includere i fondamenti di Analisi e le geometrie proiettive finite.

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 27 gennaio, 06

Caro Marcolongo,

Come puoi credere che una tua visita possa non farmi piacere ? Oramai, con la mia nomina a Bologna, non hai più motivo di diffidare dei miei sentimenti verso di te. Sai benissimo che da lungo tempo aspiravo alla cattedra di Meccanica razionale; ed ora posso assicurarti che, andando via da Napoli, non ho alcuna intenzione di ritornarvi. Anzi ti compiangio se persisti nella tua aspirazione verso questa orrida Università, degna della men civile città d'Italia !

Io andrò dunque (salvo che non sorgano ostacoli, presso il Ministero, da parte di legittimi aspiranti) andrò a Bologna, e spero che tu non vorrai criticarmi per la leggerezza con la quale assumo un così grave compito, com'è quello d'insegnare Meccanica razionale. Ma "imparare insegnando" è stata sempre la mia divisa, ed io sento di poter rispondere, lavorando, alla fiducia in me riposta da quella Facoltà.

Ogni tanto vorrai permettermi di chiederti consiglio; e per cominciare ti prego di voler rispondere ad un vero quesito: supponendo che, nel primo anno d'insegnamento, io adotti come libro di testo il "*Treatise on Nat[ural] philosophy*" di Thomson e Tait¹, quali lacune presenterebbe un tale insegnamento ?

Non che io abbia veramente intenzione di adottare veramente quel libro (parlo del "*Treatise*" in due volumi), ma intorno ad esso credo di potere pian piano costruire un corso a tendenza fisica, conducendo rapidamente gli studenti alla conoscenza delle applicazioni della Meccanica razionale.

Scusami se non ho subito risposto alla tua ultima. Sono stato ammalato, e la tua lettera mi giunse appunto mentre ero a letto con forte influenza.

¹ Cfr. W. THOMSON - P. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, 2 voll., Cambridge at the University Press, (1867). William Thomson (1824 - 1907), conosciuto anche col titolo di Lord Kelvin, era professore di Filosofia naturale all'Università di Glasgow; Peter Tait (1831 - 1901) era professore di Filosofia naturale all'Università di Edimburgo.

Gradisci, con mille saluti, una cordiale stretta di mano dal
Tuo aff. mo Collega

E.Cesàro

20

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 1 febbraio 1906

Mio caro Cesàro,

non puoi credere quanto piacere mi ha fatto la tua del 29 scorso. Io posso assicurarti che non solo non ho mai né dubitato né diffidato di te, ma che il mio affetto non è diminuito cogli anni e la stima che ho avuto sempre per te è, seppure possibile, andata sempre aumentando. Quando seppi del tuo desiderio di andar a Bologna io non mi meravigliai altro che di questo: di vederti lasciar la patria ! Della tua competenza, del tuo valore immenso, anche in meccanica, non c'è da parlare; ed io debbo anzi essere lietissimo che un uomo del tuo ingegno si dedichi alla scienza preferita dei miei diletti studi; certissimo che tutti avremo ancora molto da imparare da te e che tu, fra non molto, arricchirai la scienza di qualcun altro dei tuoi preziosi volumi. Dunque, lo ripeto, nessuna meraviglia; ma piena, incondizionata ed entusiastica approvazione. Né giova qui tornare a dichiararti che se non avessi rifiutato le offerte di Bologna prima di sapere le tue intenzioni, io mi sarei immediatamente ritirato, perché di fronte a te io sono un trascurabilissimo infinitesimo !

Tu sei troppo buono ed indulgente con me ! In che cosa mai potrei io consigliarti ? Che cosa possono valere per te l'esperienza di

moltissimi miei anni di insegnamento e l'aver anche alla peggio scribacchiato un libretto di meccanica¹ ? Tu nulla, anche da questo lato, hai da imparare da chicchessia e tanto meno da me.

Purtuttavia non vo' mostrarmi teco scortese e m'ingegnerò di rispondere alla meglio al quesito che tu mi fai.

Il libro del Thomson² è di quei libri che bisognerebbe digerire ben bene dagli insegnanti di meccanica e sebbene l'esposizione proceda a sbalzi, a volte sia intralciata, e spessissimo sia più che oscura, è sempre un libro raro in cui si contengono cose veramente sublimi. Nel redigere i due volumetti di meccanica (sui quali ti prego di non gettare un troppo disdegnoso sguardo) io l'ho tenuto costantemente presente e in qualche capitolo (come ora ti accennerò) io non ho fatto altro che sviluppare il Thomson. La tua idea dunque mi sembra ottima ed io son certo che tu puoi ricavare un corso splendido. Io non solo non saprei accennarti nessuna lacuna importante; ma anzi ti dirò che, tenuto conto dello stato di preparazione dei tuoi allievi (la maggior parte dei quali è avviata agli studi d'Ingegneria), non è possibile, almeno così a me sembra, sviluppare quanto è contenuto nel primo volume e nei primi capitoli del secondo (della maggior parte del secondo non è nemmeno il caso di parlare). Ma, se non ti rincresce, andiamo in ordine.

La cinematica dei sistemi rigidi (§ 1-153) contiene tutto quanto si è soliti esporre nei corsi, e anzi qualche cosa di più, come tutta la lunga trattazione dei moti armonici, la serie di Fourier e i frequenti richiami alla teoria delle superficie, al rotolamento di una sup[erficie] su di un'altra, ecc. La Cinematica dei sistemi non rigidi è meno sviluppata e, almeno da noi, come tu ben sai, le stesse cose e con più generalità si sogliono esporre in ben altro modo; ma in fondo c'è tutto quello che è sostanziale. Le tre appendici (lemmi di Green e analisi

¹ Cfr. nt. 3, lett. 16.

² Cfr. nt. 1, lett. 19.

armonica) non mi pare possibile includerle in un corso nel modo con cui procede il Thomson e la sede più opportuna (io almeno faccio così da vari anni e mi ci trovo bene) per trattare quegli argomenti è quando si parla dell'attrazione. Nella Dinamica pure trovo ben poche lacune; solo che il Thomson qualche volta confina negli esercizi e nelle note quanto da noi è invece messo in prima linea; certe teorie sono condensate in poche parole e, specialmente per le applicazioni hanno bisogno di maggiori sviluppi - guarda p.e. le poche parole con cui si spiccia (§289,290) del principio dei lavori virtuali.

Tu non troverai in tutta la Dinamica quei soliti problemi, quegli eterni corpi rigidi, che per Thomson (lo dice chiaro nella prefazione) sono delle semplici curiosità. (Vi è però un pochino di esagerazione); troverai invece uno sviluppo, anche troppo grande, dei metodi lagrangiani, hamiltoniani, ignorazione delle coordinate, ecc. e da ultimo le pepate e non troppo chiare questioni sulla stabilità del movimento. La statica (in quanto riguarda la teoria dell'attrazione, equilibrio dei fluidi, teoria della marea e statica dei corpi non rigidi) è confinata nelle prime parti del 2° volume. E qui, come del resto quasi sempre, la trattazione è veramente originale. Io ho riassunto il capitolo dell'attrazione degli ellissoidi nel Cap. 6° del mio secondo volumetto. Come dunque vedi nessuna lacuna nel vero senso della parola. In quel libro c'è tutto; solo che alcune cose che noi nell'insegnamento tradizionale ed ufficiale, sviluppiamo con qualche larghezza, là si trovano condensate in poche righe e sparse a dritta e a sinistra. Eppure in mezzo a questo apparente disordine quanta scienza, quanta profondità, quanta ingegnosità ! Io tengo quel libro sempre sul mio tavolo e ogni volta che lo leggo ci scorgo qualche cosa di nuovo e ci imparo sempre di più. Ben a ragione il venerando Beltrami mi diceva che dopo i Principii di Newton³, la Filos[ofia]

³ Cfr. I. NEWTON (1642 - 1727), *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Jussu Societatis Regiae ac typis J. Straeter, Londini (1687).

naturale era il libro più profondo che fosse stato scritto ! Io non manco anche di consigliarlo agli allievi volenterosi non foss'altro per gli esercizi e anche questi io ho cercato di far entrare in larga parte nei miei volumetti ! Nella prefazione io scriveva: Possano i semplici accenni del testo invogliare gli studiosi a meditare e rendere tra noi più nota e popolare l'opera poderosa del grande fisico-matematico inglese !

Che consolazione e piacere per me veder esaminato un mio modesto voto da te !

Due cose ancora io mi vorrei permettere di aggiungere. Ti consiglierai di consultare gli ultimi libri del Routh⁴, che tu certo conoscerai, che in vari argomenti costituiscono un ottimo commento al Thomson; poi debbo dirti (ma su ciò non oso nemmeno darti dei consigli) che io da vari anni faccio uso nel corso (e nei volumetti) del calcolo vettoriale e posso assicurarti che mi trovo contentissimo; debbo anzi all'uso costante di questo calcolo se ho potuto condensare in piccola mole tanta e tanta roba senza essere oscura. Se tu avessi tempo da perdere e volessi vedere con quanta semplicità ed eleganza si deducono le formule fondamentali della Cinem[atica] dei sistemi rigidi e volessi paragonare la mia deduzione con quella usuale, fondata sull'inevitabile quanto inutile corredo dei famosi nove coseni direttori; e con quanta speditezza si ottengono e le equazioni euleriane e le più generali del moto di un corpo; tu mi daresti pienamente ragione. Io mi sono preso il gusto di trattare negli esercizi, col calcolo vettoriale, alcune questioncelle (non te le cito perché mi accorgo che sto annoiandoti da un pezzo); ebbene in poche righe ho potuto riepilogare delle memorie di qualche pagina ! Questi

⁴ Cfr. E.J.ROUTH, *A treatise on Dynamics of a Particle*, Cambridge at the University Press (1898); *A Treatise on analytical Statics*, Cambridge at the University Press (1902).

metodi io li seguo anche in Fisica matematica nel corso di questo anno sulla elettrodinamica.

Il solo desiderio di seguire il Thomson (un puro seguace di Newton per ciò che concerne i principii) mi dispensa dal dirti che io sono poco tenero dei nuovi (e non riusciti) tentativi di fondare la meccanica su nuove e indiscusse basi. Io lascio discutere matematici e filosofi e, troppo piccolo e incompetente per ardire di aprir bocca, mi accontento di star a sentire e intanto seguo il buon tempo antico. Ciò, ripeto, non toglie che io legga e rilegga i Prinzipien di Hertz⁵ e le recenti e bellissime Vorlesungen del Boltzmann⁶. Ed ho finito, quando ti avrò chiesto scusa di questo gran letterone. Chi sa se anche in minima parte avrò risposto ai tuoi desideri ?

Io mi auguro che nessuna difficoltà possa sorgere per l'esaudimento dei tuoi desideri; ma andrai a Bologna fin da questo anno ? A Roma mi parve sentire che per quest'anno in attesa del disbrigo delle pratiche burocratiche, a Bologna avrebbero accomodato con una supplenza.

Se tu restassi ancora qualche mese costà non sarebbe improbabile che io ti facessi a Pasqua una visita. Se non t'incomoda, fammi sapere il tuo indirizzo che ho dimenticato.

Quanto alle mie aspirazioni è inutile parlarne. Mi illudo sempre potermi recare costà per essere più vicino a Roma e quante volte, ricordalo bene, i miei desideri non siano in opposizione ai tuoi. Intanto lavoro come meglio so e posso e benché anche io abbia sulle spalle il peso di una numerosa famiglia dedico tutta la mia attività ed il mio tempo alla scuola. Spero inviarti presto un altro interessante

⁵ Cfr. H.R.HERTZ (1857 - 1894), *Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, J.A.Barth, Leipzig (1894).

⁶ Cfr. L.BOLTZMANN (1844 - 1906), *Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik*, 2 voll., J.A.Barth, Leipzig, (1897-1904).

lavoro sulla storia della meccanica in Italia nel secolo XVIII⁷ e che è il seguito a quello da me pubblicato su Mozzi⁸.

Lasciami infine ripeterti che io sono lietissimo, come non potrei e saprei esprimerti, sapere che il tuo antico affetto per me è inalterato, e mi farai felice se, di tanto in tanto, vorrai ricordarti di me e scrivermi.

Coll'antico ed immutato affetto ti stringo cordialmente ed affettuosamente la mano.

Tuo aff. mo

R. Marcolongo

⁷ Cfr. R.MARCOLONGO, «Sul teorema di composizione delle rotazioni istantanee. Appunti per la storia della Matematica nel secolo XVIII», Bollettino di bibliografia e storia delle Scienze matematiche, 9 (1906), pp. 1-12. Marcolongo fu molto attivo nel campo della storia della meccanica e della matematica. In una prima fase si occupò, dal punto di vista storico, di alcuni problemi classici di meccanica, come il problema dei tre corpi; poi si occupò di Galileo, Einstein e di altri personaggi minori; infine, negli ultimi 15 anni della sua vita, approfondì lo studio di Leonardo Da Vinci, tanto da essere nominato membro della Commissione nazionale per gli studi vinciani.

⁸ Cfr. R.MARCOLONGO, «Notizie sul "Discorso matematico" e sulla vita di G. Mozzi», Bollettino di bibliografia e storia delle Scienze matematiche, 8 (1905), pp. 1-8. Giulio Giuseppe Mozzi (1730 - 1813) scrisse l'opera *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* (Stamperia di Donato Campo, Napoli (1763)), in cui per primo scoprì e dimostrò il teorema secondo il quale il moto istantaneo di ogni sistema rigido è un moto elicoidale, cioè di traslazione e di rotazione intorno a uno stesso asse, dal Mozzi chiamato "asse spontaneo di rotazione"; in cui compaiono, per la prima volta, il concetto di coppia e alcune sue proprietà, e tutto ciò due anni prima dell'opera *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* di Eulero (1765). Marcolongo praticamente mise in evidenza la figura di quest'uomo che era passata completamente inosservata. A tale proposito lo stesso Marcolongo scriveva nella sua autobiografia: "Il Prof. Loria ha detto che G. Mozzi era una vera incognita prima del mio lavoro, in cui, oltre a precisi dati biografici, ho minutamente esaminato e fatta risultare la grande importanza del *Discorso matematico*".

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 3 febbraio 1906

Caro Marcolongo,

Grazie vivissime per la tua lettera del 1° Febbraio, giuntami ieri sera. Grazie per l'espressione dei tuoi sentimenti, tanto benevoli verso di me, e che io contraccambio con tutto il cuore.

Grazie per le preziose osservazioni sull'opera del Thomson, osservazioni che terrò presenti continuamente nella preparazione del mio corso, come terrò presenti le tue lezioni, che ho già molte volte avuto occasione di consultare, e che a me sembrano le più vicine al mio ideale d'un corso di Meccanica con finalità fisiche. Ti confesso però che probabilmente mi allontanerò da te appunto per l'uso dei vettori, perché mi sembra che, in un primo insegnamento, questi oscurino piuttosto i puri concetti meccanici, ai quali io vorrei dare quel rilievo che mi seduce nel libro del Thomson, dove la matematica sta, per così dire, dietro le quinte. Ad ogni modo di ciò potremo discorrere uno di questi giorni; e non è impossibile che la pratica stessa dell'insegnamento mi faccia mutar parere.

Spero che ai consigli generali datimi vorrai aggiungere altri consigli su punti speciali, intorno ai quali mi permetterai di tediarti di tanto in tanto. Per ora accogli l'espressione dei migliori sentimenti del

Tuo dev. mo Collega

E. Cesàro

P.S. Naturalmente non è per quest'anno il mio trasferimento a Bologna. Io suppongo che debba aver corso a partire dal prossimo Novembre.

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 4 febbraio 1906

Caro Collega,

In aggiunta alla mia lettera di ieri ho una preghiera da rivolgerti. Vorrei sapere se in inglese vi è un nome per designare ciò che noi chiamiamo il "nocciolo centrale". Ho cercato invano in vari libri e nell'Enciclopedia Britannica.

Colgo l'occasione per dirti che, in fatto di Meccanica, sono anch'io "conservatore"; e penso che le analisi dissolventi che si vanno facendo da un pezzo in Meccanica ed in geometria debbano soltanto servire come lenti d'ingrandimento, per meglio scorgere i difetti del vecchio edificio, e porvi riparo senza guastarne l'armonia.

Dico bene ?

Anticipati ringraziamenti ed una cordiale stretta di mano dal

Tuo dev. mo Collega

E.Cesàro

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 6 febbraio, 1906

Caro Cesàro,

mi proponevo rispondere alla tua ultima; tu mi hai prevenuto. Non posso però esaurientemente rispondere alla tua questione, ch  qui io sono assai sprovvisto di libri. Posso dirti solo (e ti dir  cose notissime) che Thomson (Nat. Phil. Vol. 1^o art. 282, pag 261)¹ adopera la locuzione "Momental ellipsoid", Routh² (Dynamics) segue Thomson.

Si aggiunge anche il nome di Poinso³, mentre la considerazione di tale ellissoide   di Cauchy⁴. Il Whittaker (A Treatise on the Analytical Dynamics)⁵ adopera pure la denominazione di "Cauchy's momental ellipsoid" (pag.122). Altro non so; come vedi la mia scienza non va molto avanti.

¹ Thomson cos  scrive: "For every rigid body there may be described about any point as centre, an ellipsoid (called *Poinso's Momental Ellipsoid*) which is such that the lenght of any radius-vector is inversely proportional to the radius of gyration of the body about that radius-vector as axis." In realt  lo stesso Thomson, in una nota, dice che la definizione di *Momental Ellipsoid* non   dovuta a Poinso, ma   sua. Infatti egli scriveva: "The definition is not Poinso's, but ours. The momental ellipsoid as we define it is fairly called Poinso's, because of the splendid use he has made of it in his well-known kinematic representation of the solution of the problem - to find the motion of a rigid body with one point held fixed but otherwise influenced by no forces."

² Cfr. nt. 4, lett. 20.

³ Louis Poinso (1777 - 1859), matematico francese, divenne nel 1809 professore di Analisi matematica alla Scuola Politecnica, nel 1813 ispettore generale dell'Universit , nel 1840 membro del consiglio superiore dell'istruzione pubblica, nel 1846 pari di Francia e nel 1852 senatore. Le sue ricerche pi  importanti interessano la Meccanica razionale, in particolare la teoria delle coppie e il moto dei corpi rigidi attorno a un punto fisso.

⁴ Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857).

⁵ E.T. WHITTAKER (1873 - 1956), *A Treatise on the Analytical Dynamics*, Cambridge at the University Press (1904). Fu il primo libro a dare un resoconto sistematico della teoria che scaturiva dalle equazioni di Hamilton e fu di fondamentale importanza per lo sviluppo della teoria dei quanti.

Tu dici benissimo riguardo ai principi. Io poi più che conservatore sono addirittura forcaiuolo (in meccanica solamente però) !

Io spero poi che tu vorrai, col tempo, essere meno severo col calcolo vettoriale. Ridotte le cose al modo mio non solo gli studenti non trovano difficoltà, come mi ha convinto l'esperienza di cinque anni, ma si mettono presto al corrente ed al caso di applicarlo con profitto. È vero, verissimo che in Kelvin l'apparato matematico sta in seconda linea; ma ciò è solo un'apparenza; molte delle cose che Kelvin accenna (in carattere grasso) non sono affatto dimostrate e se si vogliono dimostrare il calcolo vettoriale conduce allo scopo con una incredibile speditezza.

Se a te non dispiace questa corrispondenza con un umile gregario io, in altra mia, scenderò a dei confronti e tu poi giudicherai. Intanto io ti raccomando (me lo ero dimenticato l'altra volta) il libro citato recente del Whittaker (se qui non ci fosse io potrei inviartelo). Quanto ai principi poi tu certo conoscerai gli ultimi splendidi libri del Duhem⁶ col quale ho avuto anche una piccola cortese polemica storica⁷. Io possiedo tutti i libri del Duhem.

⁶ Pierre Duhem (1861 - 1916), professore di Fisica teorica all'Università di Bordeaux, si occupò di quasi tutti i campi della Fisica matematica (statica, idrodinamica, elasticità, acustica, elettricità, magnetismo, meccanica chimica, etc.) e di storia della scienza. Le opere più importanti pubblicate da Duhem negli anni a ridosso del 1906 sono: *Recherches sur l'hydrodynamique*, 2 voll., Gauthier-Villars, Paris (1903-1904); *Recherches sur l'élasticité*, Hermann, Paris (1906); *Les origines de la statique*, 2 voll., Hermann, Paris (1905-1906)). Comunque Marcolongo chiarisce i libri del Duhem a cui si riferisce nella lett. 25. Alla sua morte Marcolongo gli dedicò un corno necrologico (cfr. R.MARCOLONGO, «Pierre Duhem», *Giornale di Matematiche di Battaglini*, 54 (1916)).

⁷ Tale polemica riguardava il giudizio, espresso dal Duhem nell'opuscolo *De l'accélération produite par une force constante* (1904), e nei volumi *Les origines de la statique*, su Galileo quale fondatore della dinamica, e che Marcolongo, nella lett. 25, giudica come "ingiusto". Duhem tratteggiava nei suoi lavori un Galileo ancora legato

Dunque ad un'altra volta.

Tuo aff. mo

R. Marcolongo

alla fisica aristotelica, che non possedeva il principio d'inerzia e le cui ricerche riguardavano la Cinematica, anziché la Dinamica. Marcolongo risponderà definitivamente alle tesi del Duhem nella memoria «Lo sviluppo della meccanica sino ai discepoli di Galileo» (Memorie dell'Accademia dei Lincei, (5), 13 (1919), pp. 89-138), in cui si occupa della Storia della dinamica, mettendo in luce i contributi degli scienziati italiani e rispondendo con un'analisi minuziosa ad ogni critica di P. Duhem sull'opera di Galileo.

24

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 8 febbraio, 1906

Caro Marcolongo,

La tua risposta, della quale ti ringrazio, mi fa vedere che io mi sono assai male spiegato. Non è dell'ellisse centrale d'inerzia d'una figura piana che ho voluto parlare, bensì del luogo degli antipoli, rispetto a tale ellisse, delle tangenti al contorno della figura stessa: ciò che i francesi chiamano "noyau central". Sono convinto dei grandi vantaggi del calcolo vettoriale, ma credo, per ora, che non convenga servirsene fin dai primi passi.

Conosco bene i due ottimi libri più recenti del Routh¹, e li trovo utilissimi anche come fonti di esercitazioni. A proposito, che cosa pensi degli esercizi del Walton²? E della "Dinamic of a particle"

¹ Cfr. nt. 4, lett. 20.

² William Walton (1813 - 1901).

del Webster³ ? Non conosco il libro del Whittaker⁴, ma lo farò subito venire. Grazie. Posseggo anch'io tutte le opere del Duhem⁵, anche le recenti d'indole storica (*Origin de la Statique*) o filosofica (*La Théorie physique*), e me ne avvantaggerò certamente; ma è la tendenza inglese quella che mi sorride.

Credimi sempre, con una cordiale stretta di mano, tuo aff. mo
Collega

E.Cesàro

³ Cfr. A.G.WEBSTER, *The Dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies*, Teubner, Leipzig (1904). Arthur Gordon Webster era professore di Fisica alla Clark University, Worcester, Massachusetts.

⁴ Cfr. nt. 5, lett. 23.

⁵ Cfr. nt. 6, lett. 23.

25

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 12 febbraio 1906

Caro Cesàro,

scusa se io non avevo compreso la tua domanda; ma non mi trovo al caso, nemmeno ora che ho capito, di darti risposta. Debbo però in questi giorni scrivere al Greenhill. M'informerò da lui.

Conosco la raccolta del Walton¹; è abbastanza buona ma non preferibile, secondo me, al Saint-Germain. Del resto in fatto di tali libri non si sta bene; conoscerai certamente quella ponderosa cd

¹ Cfr. nt. 2, lett. 24.

indigesta zavorra tedesca del Kraft² ! Del Webster³ non conosco purtroppo che le recensioni ! E le esigenze della famiglia non mi consentono di comperare molti libri ! Che pensi tu dei libri del Maggi⁴?

C'è, secondo me della buona roba, ma la maniera di esporla è impossibile. Da noi poi, parlo in generale dei corsi che si fanno in molte università, si fa ancora della vecchia meccanica in buona parte aggirantesi sui famosi fili e i famosi giuochetti di statica e i problemini di Dinamica che Kelvin chiama di pura curiosità. Tu quindi che vuoi ispirarti agli inglesi sommi sei proprio sulla diritta via.

Nella mia ultima ti parlavo del Duhem: Les Origines de la Statistique e l'altro opuscolo sulla dinamica⁵ sono certamente notevoli ma è ben singolare che egli creda, a proposito di Nemorario⁶, di dir cose nuove mentre eran ben note anche per i recenti lavori dei

² K.W.FERDINAND KRAFT (1844 - 1924), *Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik*, 2 voll., Mertzler, Stuttgart (1884-85).

³ Cfr. nt. 3, lett. 24.

⁴ Gian Antonio Maggi (1856 - 1937), laureatosi a Pavia nel 1877-78, vi rimase prima come assistente e poi come libero docente di fisica sperimentale. Nel 1885 fu nominato straordinario di Analisi all'Università di Modena, e l'anno dopo, in seguito a concorso, ordinario a Messina. Nel 1895 fu chiamato a Pisa per la Meccanica razionale, da dove, nel 1924, passò alla neoistituita Università di Milano, andando a riposo nel 1931.

⁵ Cfr. nt. 6, lett. 23.

⁶ Giordano Nemorario (di cui sono incerte le date di nascita e morte), è stato identificato da alcuni con Giordano di Sassonia, esponente dell' Ordine Domenicano, morto nel 1237. Viene considerato l'iniziatore degli studi medievali di meccanica (a lui si deve la prima formulazione corretta della legge del piano inclinato). Fu anche autore di libri di aritmetica, geometria e astronomia. In particolare la sua *Arithmetica* è significativa specialmente per l'uso di lettere invece di cifre, rendendo così possibile la formulazione di teoremi algebrici generali. Fu inoltre la base di commenti divulgativi molto diffusi all'Università di Parigi fino al XVI secolo.

Vailati⁷ che il Duhem (me lo ha scritto) non conosceva ! Egli dice poi cose assolutamente non vere a proposito di Galileo, verso il quale è ingiusto. E pare che non conosca nemmeno di nome l'opera poderosa del nostro Caverni⁸ sulla Storia del metodo sperimentale in Italia e dove, nel 3° volume, si fa con assai maggior competenza e profondità la storia della meccanica galileiana. Sempre così i francesi quando vogliono parlare delle cose nostre, senza conoscerle a fondo.

Del Whittaker io ho fatto una lunga recensione⁹ per "l'Enseignement mathématique" che ti manderò appena stampata.

Saluti affettuosamente cordiali dal tuo
aff. R. Marcolongo

⁷ Giovanni Vailati (1863 - 1909) fu assistente di G. Peano all'Università di Torino, da cui poi passò all'insegnamento medio. Fu un filosofo e storico della scienza. Alla sua morte Marcolongo gli dedicò un cenno necrologico (cfr. R.MARCOLONGO, «In memoria di Giovanni Vailati», Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 8 (1909)).

⁸ Cfr. R.CAVERNI, *Storia del metodo sperimentale in Italia*, G.Civelli, Firenze (1891-1900).

⁹ Cfr. R.MARCOLONGO, «E.T.Whittaker-A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and rigid body (London, 1904)», *L'Enseignement Mathématique* (1906), pp. 169-173.

26

ERNESTO CESÀRO A ROBERTO MARCOLONGO
in Messina

Napoli, 15 agosto 1906

Caro Marcolongo,

Ti prego di farmi conoscere il preciso attuale indirizzo del Vivanti¹ affinché io possa portargli o spedirgli con sicurezza gli opuscoli già pervenuti al suo indirizzo, respinti da Agerola².

Avrei avuto gran piacere di rivederti prima di partire per Bologna, dove mi propongo di trovarmi stabilito ai primi di Novembre. Fino a questo momento mi è mancato il tempo di preparare il mio corso, e temo assai di dover fare pessima figura nel mio primo anno d'insegnamento. Se verrai in Ottobre, ti prego di farti vedere. I tuoi consigli mi saranno utilissimi. Mille cordiali saluti

dal Tuo Collega
E. Cesàro

¹ Cfr. nt. 3, lett. 3.

² Località montana appartenente ai monti Lattari, nella penisola sorrentina.

27

ROBERTO MARCOLONGO A ERNESTO CESÀRO
(in Napoli)

Messina, 17 agosto 1906

Caro Cesàro,

L'amico Vivanti¹ trovasi dal 1° agosto a villeggiare ad Agerola (vicino Amalfi); là io gli scrivo e non comprendo come le sue note gli

¹ Cfr. nt. 3, lett. 3.

siano state respinte. Lo informerò subito del fatto. Ti ringrazio del dono della tua elegante nota² !

Lo scorso giugno fui a Roma per pochi giorni; nel ritorno volli fermarmi e volevo venire da te; ma mi occorre un brutto incidente. Mentre mi recavo al vagone mi fu rubata la valigia ! Tu comprenderai il resto: sciupai mezza giornata in questura !

Il giorno 28 del corrente sarò di passaggio per costà con tutti i miei; ma non potrò nemmeno uscire dalla stazione dovendo subito proseguire per Roma. Ai primi di ottobre io sarò nuovamente di passaggio per recarmi a Reggio per certi esami; allora conto trattenermi e venirti a salutare se tu ancora sarai costà. Recandoti a Bologna non passerai per Roma ? Ci potremmo vedere colà ? A Roma io abiterò in Via Modena N° 50.

Tu vuoi certamente scherzare sulla tua paura di fare brutta figura ! Vorrei poter io assistere alle tue lezioni e diventare un tuo modesto allievo ! Intanto permettimi di essere sempre un tuo caldo ammiratore ed un tuo devoto amico che ti augura ogni bene. Saluti cordialissimi dal tuo

aff. mo R. Marcolongo

² Marcolongo si riferisce probabilmente a una delle tre memorie che Cesàro pubblicò nel 1906, ultimo anno della sua vita: E.CESÀRO, «Sul problema dei suoli elastici» (Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, (3) 12); «Sulle formole del Volterra fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche» (ibid.); «Fonctions continues sans dérivée» (Archiv der Mathematik und Physik, (3) 10).

L.Carbone: Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" - Università degli Studi di Napoli "Federico II".

G.Cardone: Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" - Università degli Studi di Napoli "Federico II".

F.Palladino: Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata - Università degli Studi di Salerno.

ABOUT EFFICIENT EVALUATION OF $B_{m,k}(f;t)$

Nota di Alba Chiara Simoncelli
Presentata dal Socio Prof. G. Scarpetta

Adunanza del 5 novembre 1994

Abstract : An efficient rendering algorithm for curves of parametric equation $P(t) = B_{m,k}(f;t)$ is discussed. It also offers some insight of geometric properties of the curves.

Sunto : Si discute un algoritmo di riproduzione per curve di equazione parametrica $P(t) = B_{m,k}(f;t)$. Oltre alla efficienza computazionale, esso offre lo strumento per una prima caratterizzazione delle proprietà geometriche di queste curve.

Key words: Computer Aided Geometric Design, Generalized Bèzier curve, Generalized Bernstein operator, free form curve, rendering, shape control.

1. Introduction

The $B_{m,k}$ operator was first introduced in [Mastroianni/Occorsio77]. If the identity operator is denoted by I and the Bernstein operator defined by

$$(1.1) \quad B_m(f;t) = \sum_{j=0}^m f\left(\frac{j}{m}\right) \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j} \quad ; f \in C^0, t \in [0,1]$$

is denoted by B_m , then $B_{m,k}$ is defined as :

$$(1.2) \quad B_{m,k} = I - (I - B_m)^k \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

and can also be expressed as :

$$(1.3) \quad B_{m,k} = \sum_{i=1}^k a_i B_m^i \quad m, k \in \mathbb{N}$$

where :

$$(1.4) \quad a_i = (-1)^{i-1} \binom{k}{i}$$

and B_m^i is the i -th iterate of the Bernstein operator, defined by:

$$(1.5) \quad B_m^i(f; t) = \begin{cases} B_m(f; t) & \text{if } i=1 \\ B_m(B_m^{i-1}(f); t) & \text{if } i>1 \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

$B_{m,k}$ is a linear operator that changes continuous functions into polynomials of degree m . It enjoys remarkable properties (see [Mastroianni/Occorsio77] and [Mastroianni/Occorsio78]) that make it especially interesting for C.A.G.D. applications, namely :

(a) if m is fixed, as k tends to infinity the polynomial $B_{m,k}(f; t)$ converges to the Lagrange polynomial interpolating the function f on the abscissas $\{j/m\}_{j=0,m}$;

(b) if k is fixed, as m tends to infinity $B_{m,k}(f; t)$ uniformly converges to the function f , provided this is sufficiently regular ;

(c) by definition, $B_{m,1}$ is just the Bernstein operator.

Because of properties (a), (b), (c), once the set of values $\{f(j/m)\}_{j=0,m}$ is fixed, polynomials in the family $\{B_{m,k}(f; t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ continuously bridge the Bernstein polynomial approximating those values to the Lagrange polynomial interpolating them.

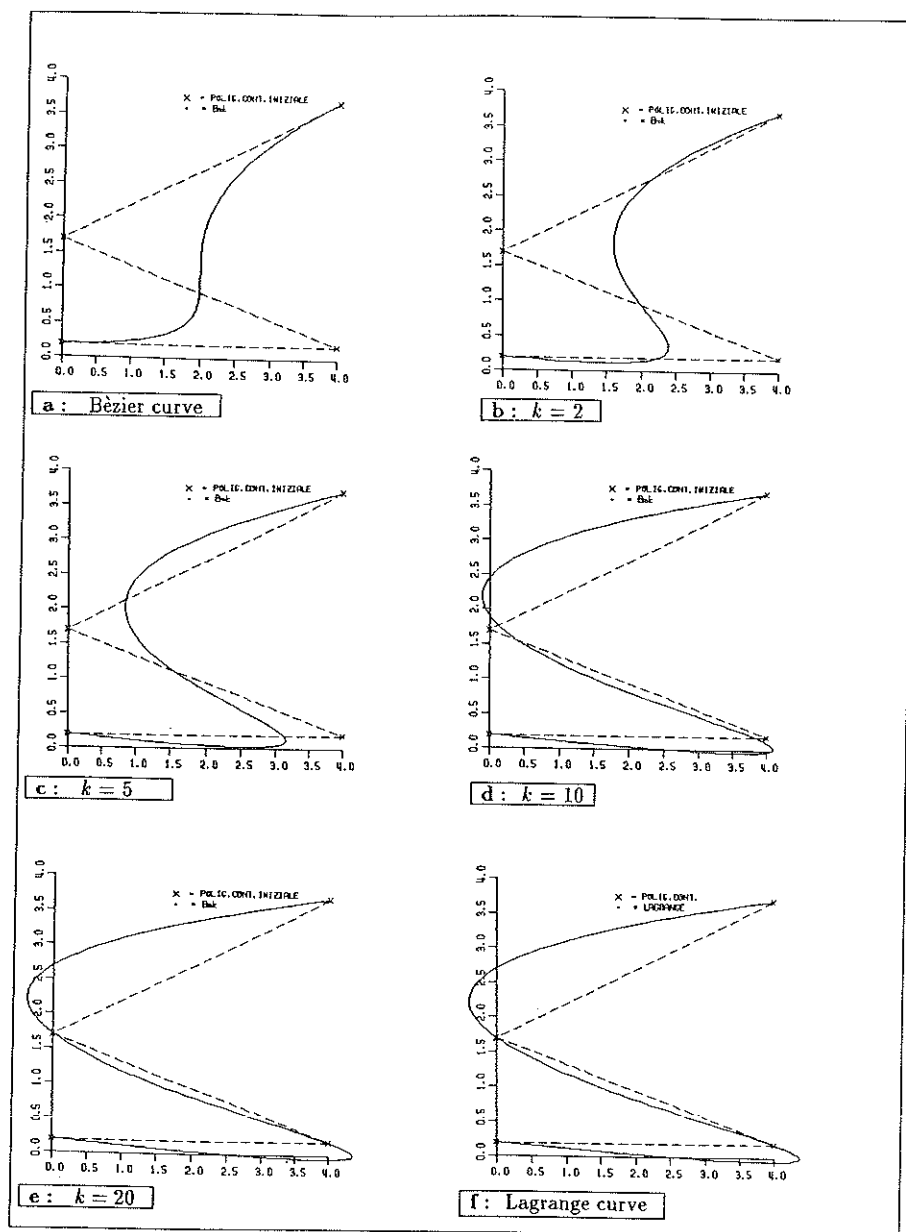


Figure 1.1 - From a Bézier curve to a Lagrange curve by means of the k parameter

It is therefore straightforward that the introduced operator, in parametric form, generates a class of curves, approximating control polygons of R^d ($d=2,3$), that links the class of Bèzier curves to the class of Lagrange interpolating curves. We shall denote this class by B_{mk} : it is the set of all curves of equation $P(t) = B_{m,k}(f;t)$ in R^d . It is reasonable to expect that at least some curves in B_{mk} retain the good geometrical properties of Bèzier curves while being closer then they to the control polygon, as Lagrange curves are.

Geometrical characteristics of curves in B_{mk} will be thoroughly discussed elsewhere, but we want to emphasize, here, that the k parameter is a convenient *shape control parameter*, as figures 1.1, 1.2, 1.3 show. There, curves in B_{mk} corresponding to different values of k are compared to the Bèzier curve ($k=1$) and the Lagrange curve ($k=+\infty$) of the same control polygon : they clearly mimic the control polygon much more closely.

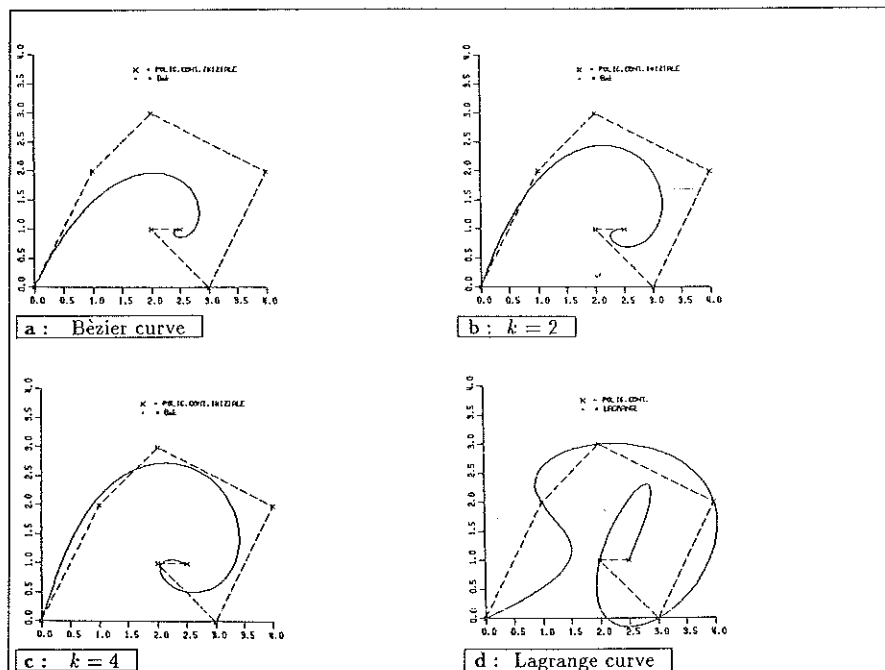


Figure 1.2 - Use of k parameter for shape control

We shall now turn our attention to the problem of computer displaying - or, as usually is said, computer *rendering* - of curves in $B_{m,k}$.

2. Rendering algorithm

The problem of rendering curves of the introduced class obviously comes down to that of evaluating $B_{m,k}(f)$, separately, for each component $f(t)$ of $f(t)$. Expression (1.2) is not convenient for this purpose, as it cannot be evaluated unless the function $f(t)$ is known at each value of the parameter for which a point of the curve must be drawn. In *free form curve* rendering this is not the case: usually only a few points are known, the *control polygon*, from which the whole curve must be reconstructed. Expression (1.3) is more adequate, as the identical operator does not appear in it, while only B_m and its iterates do. By means of (1.3) $B_{m,k}(f;t)$ can be evaluated at any t from the values assumed by $f(t)$ at equally spaced knots. In the next we shall therefore refer to (1.3).

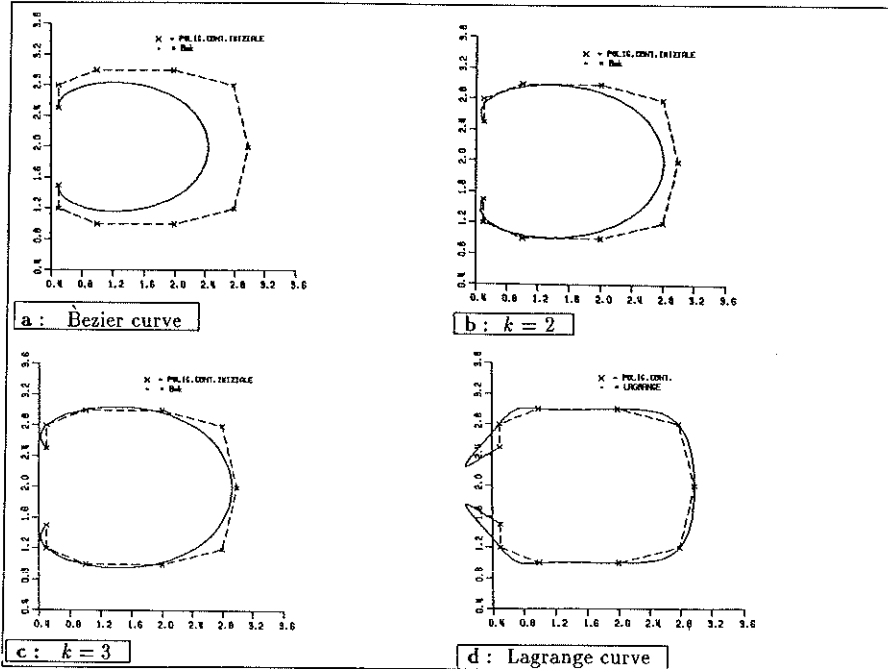


Figure 1.3 - Use of k parameter for shape control

Also, we shall always make use of the De Casteljau algorithm [Farin90] to evaluate the Bernstein operator.

In a straightforward application of (1.3), the iterates $B_m^i(f;t)$ can be evaluated from definition (1.5) and the coefficients a_i from the recurrence relation :

$$(2.1) \quad a_i = \begin{cases} (-1)^{k-1}k & i=1 \\ a_{i-1} \frac{k-i+1}{i} & i=2, \dots, k. \end{cases}$$

According to (1.5), each iterate $B_m^i(f;t)$ ($i=1, \dots, k-1$) must be evaluated both at the point t and at the abscissas $\{t_j = j/m\}_{j=0, \dots, m}$, since the values $B_m^i(f;t_j)$ are needed to evaluate $B_m^{i+1}(f;t)$. At each step except the last one, therefore, the De Casteljau algorithm must be performed $m+2$ times, so the evaluation of each component at one point requires

$$N_m = (k-1)\{(m+2)m(m+1)+3\} + \{m(m+1)+3\} = (k-1)m^3 + (3k-2)m^2 + (2k-1)m + 3k$$

multiplications, and

$$N_s = (k-1)\left\{(m+2)\frac{m(m+1)}{2} + 3\right\} + \left\{\frac{m(m+1)}{2} + 2\right\} = \frac{(k-1)}{2}m^3 + \frac{(3k-2)}{2}m^2 + \frac{(2k-1)}{2}m + 3k-1$$

sums.

The total number of operations required to display one point on the curve is therefore $d(N_m + N_s) = O(dkm^3)$ where d is the number of components.

This algorithm was implemented on a personal computer with Intel-486 chip, using fourteen digits floating point arithmetic, and was tested on several control polygons from current literature : full description of the tests is given in [Sica/Simoncelli94]. Some sample curves, relative to test control polygons in [Lane/Riesenfeld80] and [Lee89] are also reported here in figg. 2.1, 2.2, 2.3. As figures in section one, they show that, as k increases, the curves grow closer to the control polygon and also give a visually better approximation of it.

It is also evident from those figures, though, that for high values of k roundoff error may accumulate so much to make the curve drawn completely

unreliable (see the noise effect in figg. 2.2.d and 2.3.d). Actually the highest value of k that can be *safely* reached depends not only on the number of points in the control polygon, but also on its shape. Experimentally obtained threshold values for k are also reported in [Sica/Simoncelli94].

This loss of precision is an obvious consequence of evaluating products of factors that are very different in magnitude [Sterbenz74] : the coefficients a_i have the magnitude of binomials (therefore they grow very fast and then decrease very fast) while the magnitude of $B_m^i(f;t)$ does not significantly depend on the summation index i . The poor performance of the algorithm, though, is also partly due to the fact that, for the same reason, elements in the second half of the sum are being accumulated in decreasing order : this can be avoided by careful reorganization of the computation .

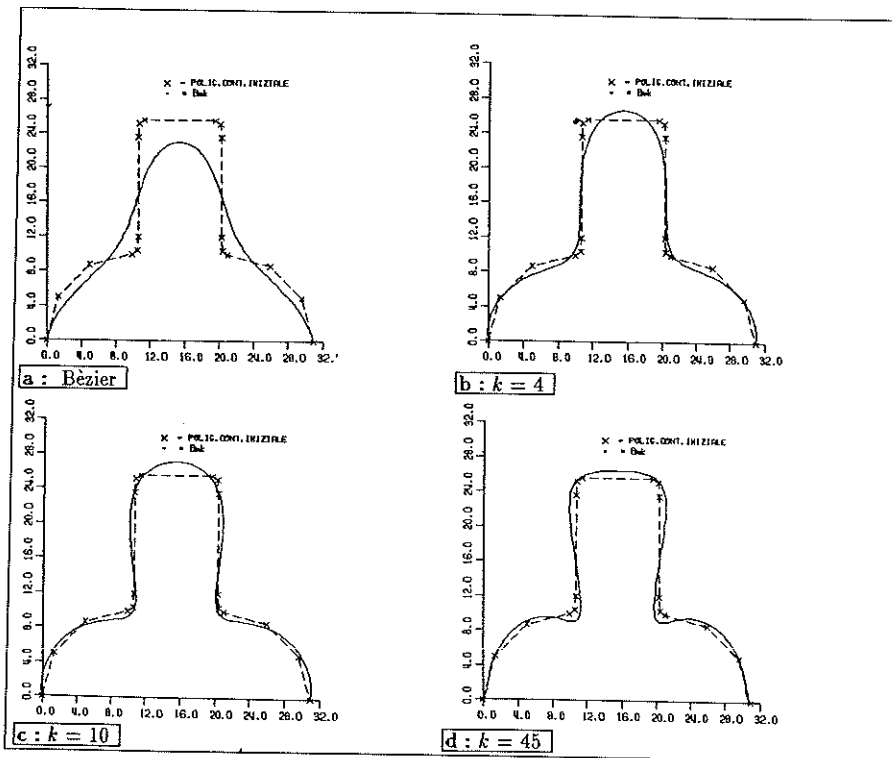


Figure 2.1 - Bottleneck from [Lee89]

Even more important, this naive application of (1.3) requires that the whole calculation (or most of it, if intermediate results are saved in memory arrays) be repeated for each different value of t : this is a fatal drawback for computer graphics applications. In the next section we shall introduce an algorithm that easily overcomes both problems.

3. A Horner-like algorithm

Computation can, in fact, be made more efficient simply reorganizing the polynomial expression in (1.3) in a Horner-like fashion, like this :

$$(3.1) \quad B_{m,k}(f;t) = B_m \left\{ \dots B_m \left\{ B_m \left\{ a_k B_m(f;t) + a_{k-1}f;t \right\} + a_{k-2}f;t \right\} + \dots + a_1 f;t \right\}.$$

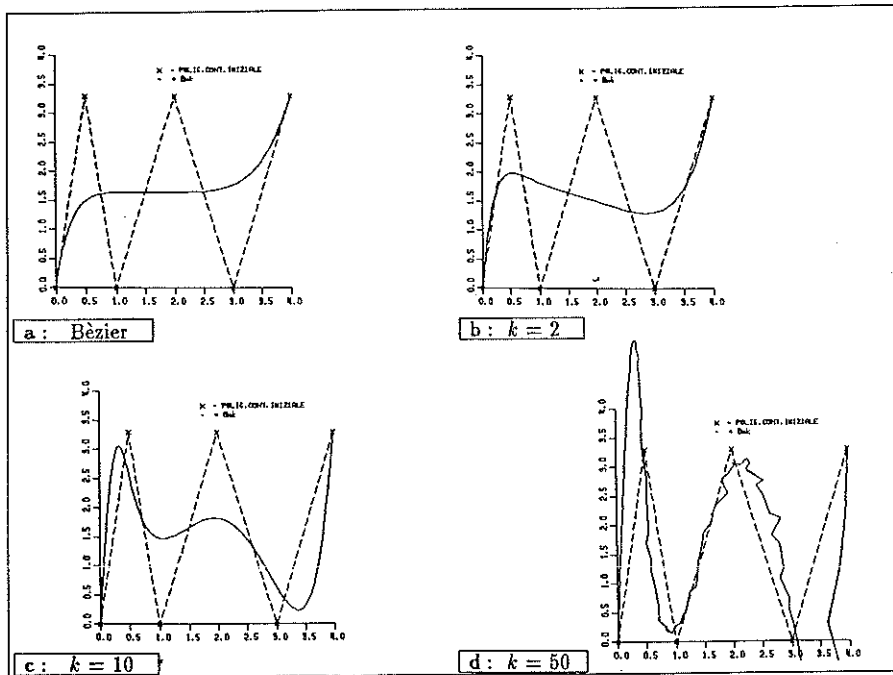


Figure 2.2 - Sample control polygon from [Lane/Riesenfeld80]

The evaluation of (3.1) consists again of $k-1$ preliminary steps, each one corresponding to the evaluation of one couple of nested braces, plus one final step corresponding to the evaluation of the outmost B_m . This time, though, in the preliminary steps the function between braces must be evaluated only at the abscissas $\{t_j\}_{j=0,m}$, those values being needed to evaluate the B_m operator at the next step.

Evaluation of $B_{m,k}(f;t)$ at one point therefore requires :

$$N'_m = (k-1) \left\{ 2 + (m+1) \left\{ m(m+1) + 1 \right\} \right\} + m(m+1) = (k-1)m^3 + (2k-1)m^2 + (2k-1)m + 3k-3$$

multiplications, and N'_s sums, with :

$$N'_s = (k-1) \left\{ (m+1) \left\{ \frac{m(m+1)}{2} + 1 \right\} \right\} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{2} \left\{ (k-1)m^3 + (2k-1)m^2 + (3k-2)m + 2k-2 \right\}.$$

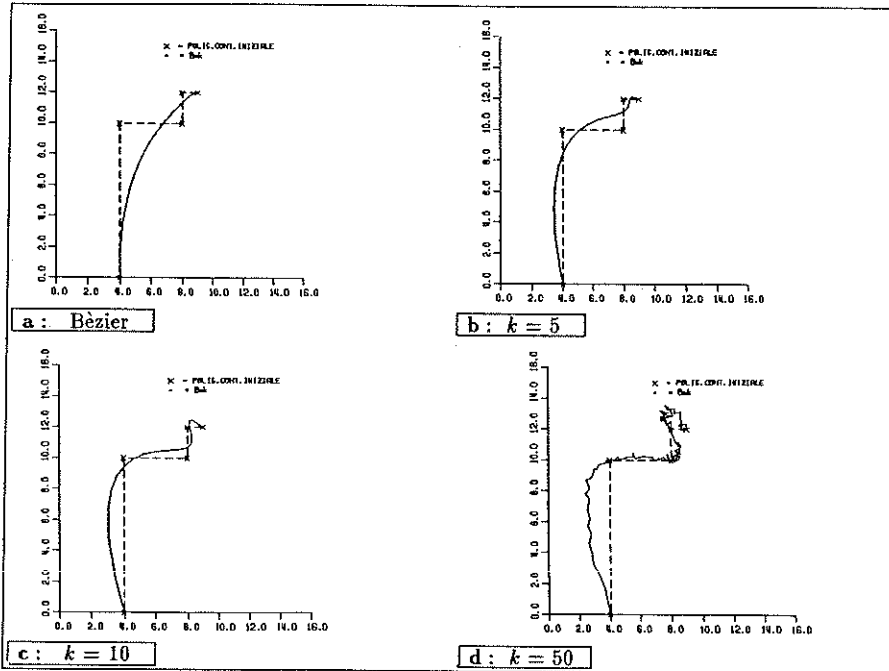


Figure 2.3 - Sample control polygon from [Lec89]

The total number of operations required to display one point is $d(N'_m + N'_s)$. It seems not to be quite different from the number of operations required by the naive algorithm in section two, but such equivalence is actually just apparent.

In fact, once the first point on the curve has been rendered, only the last step of the Horner-like algorithm must be repeated to evaluate a new point (being the preliminary steps completely independent of t) while, as we mentioned before, the first algorithm should be completely repeated. So, while in the first case to render one more point costs exactly as much as to render the first one (that is $O(dkm^3)$ operations), using the second algorithm it only costs $O(dm^2)$ multiplications.

Let us look at (3.1) from a slightly different point of view. The final step is just a De Casteljau algorithm : thus the $k-1$ preliminary steps of the algorithm (evaluation of all nested braces) actually calculate a new control

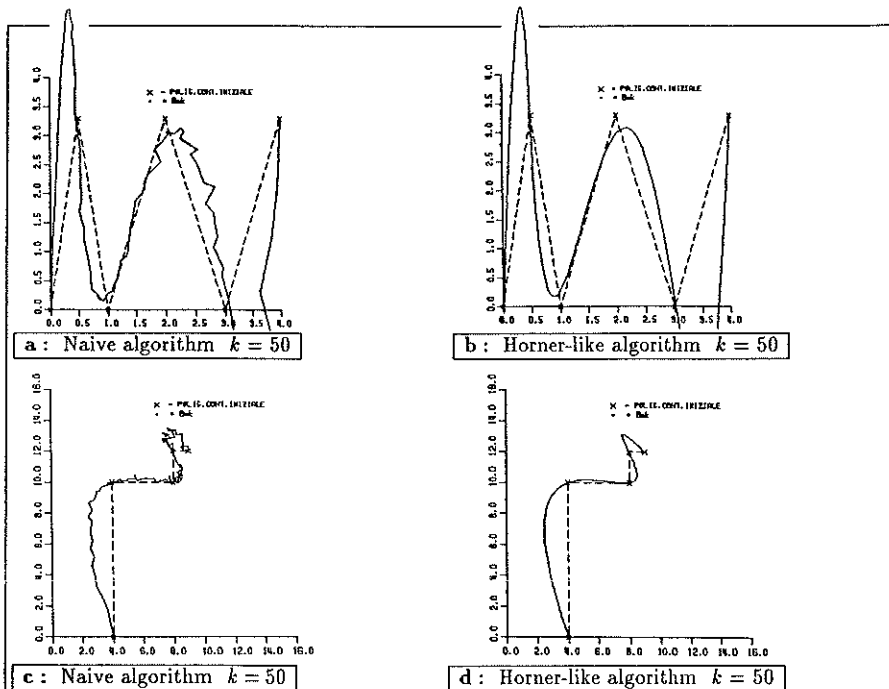


Figure 3.1 - Comparison of algorithms' performance

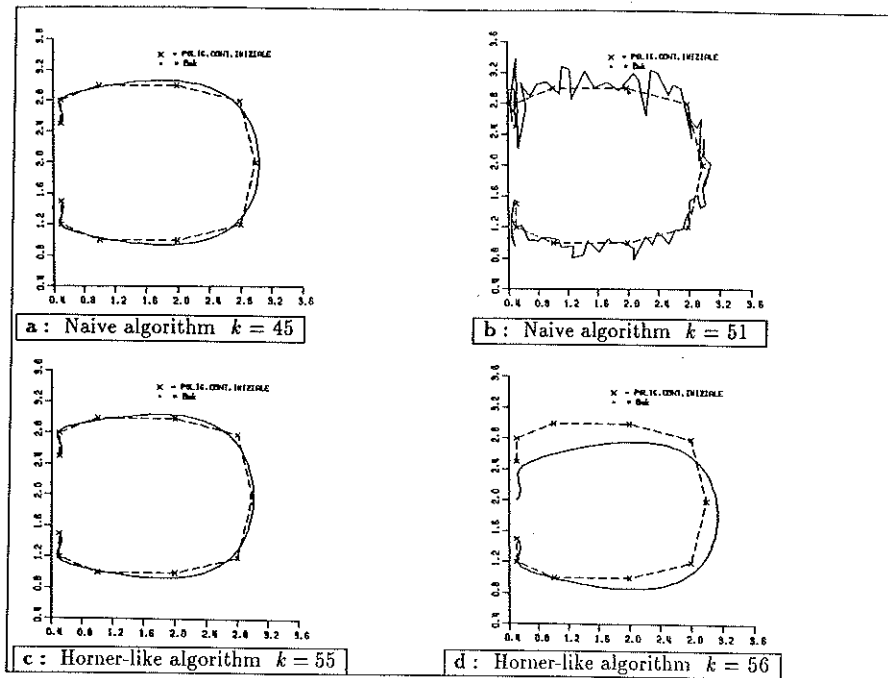


Figure 3.2 - Different effect of roundoff error

polygon whose Bèzier curve is our curve. This circumstance is not only interesting from the algorithmic point of view, but mainly as it allows us to recognize the curve as the Bèzier curve of a new control polygon that can be derived directly from the original one. This can be a precious instrument in investigating geometric properties of curves in B_{mk} .

As we said, the first algorithm could also be implemented in such a way to repeat only part of the calculations for every new value of t , saving in a memory array all vectors $\{B_m^i(f; t_j)\}_{j=0, m}$. Adding one point to the curve, then, would cost as much as one De Casteljaun algorithm at each step, that is $km(m+1)$ products in all. This would save computing time, but still would not provide any qualitative information about the curve such as that connected with the Bèzier polygon generated by the Horner-like algorithm.

Finally, even though the fast growing coefficients a_i are still involved in the

computation, the better organization of the computation itself reduces the effect of roundoff error and raises the reliability threshold for k . Figures 3.1.b and 3.1.d are just two examples to illustrate this circumstance: they should be compared to 2.2.d and 2.3.d respectively. Also, the different effect of the accumulated roundoff error on the curves displayed is shown in figures 3.2 and 3.3 below.

Acknowledgements

I want to thank Prof. M.R. Occorsio for encouraging me to tackle this topic and patiently discussing it with me. I also thank Prof. Ivana Horova for a challenging discussion and for pointing expression (1.3) to my attention.

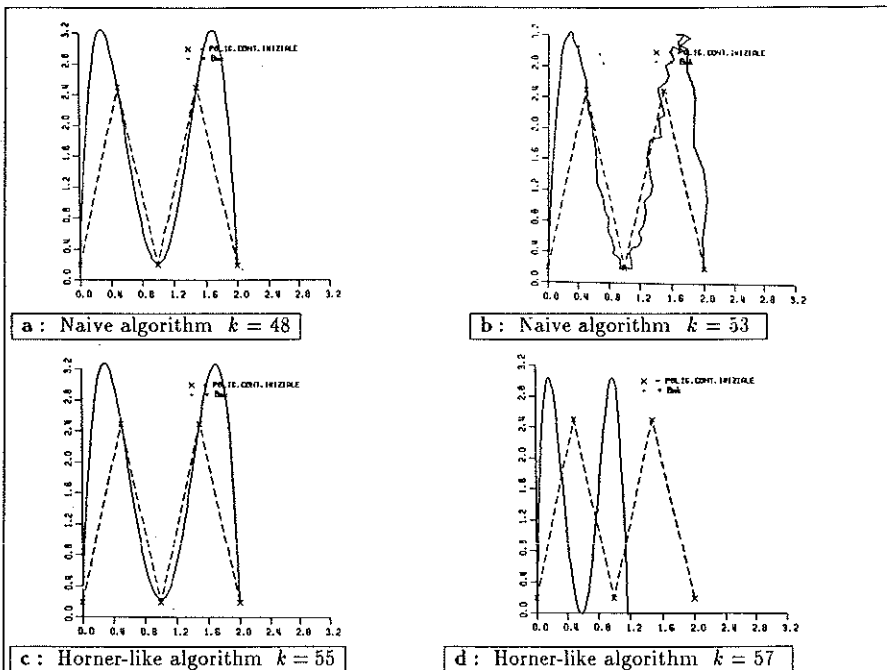


Figure 3.3 - Different effect of roundoff error

REFERENCES

- [Farin90] Farin, G. , *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press (1990).
- [Lane/Riesenfeld80] Lane, J.M., Riesenfeld, R.F. , A Theoretical Development for the Computer Generation and Display of Piecewise Polynomial Surfaces, *IE EE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2 (1980), 35-46.
- [Lee89] Lee, E.T.Y., Choosing nodes in parametric curve interpolation, *Computer Aided Design*, 21 (1989), 6, 363-370.
- [Mastroianni/Occorsio77] Mastroianni, G., Occorsio, M.R. , Una generalizzazione dello operatore di Bernstein, *Rend. Accad. Sc. Mat. Fis. Nat. Napoli*, Serie IV, 44 (1977) , 151-169.
- [Mastroianni/Occorsio78] Mastroianni, G., Occorsio, M.R. , Una generalizzazione dello operatore di Stancu, *Rend. Accad. Sc. Mat. Fis. Nat. Napoli*, Serie IV, 45 (1978), 495-511.
- [Sica/Simoncelli94] Sica, R., Simoncelli, A.C. , Algoritmi per la valutazione dello operatore $B_{m,k}$, *Pubblicazioni del Dipartimento di Matematica ed Applicazioni dell'Universita' di Napoli*, (1994) 40.
- [Sterbenz74] Sterbenz, P.M. , *Floating point computation*, Prentice Hall (1974)

Author's address :

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università Federico II di Napoli
Complesso universitario di Monte S. Angelo , Via Cinthia, Napoli

LE SIMMETRIE DI NÖTHER IN COSMOLOGIA QUANTISTICA

Nota di Salvatore Capozziello*
Presentata dal Socio Prof. G. Scarpetta

Adunanza del 5 novembre 1994

Riassunto. Si considerano modelli di minisuperspazio per una classe di teorie della gravitazione non minimalmente accoppiate con un campo scalare e si dimostra che, quando esiste una simmetria di Nöther, è sempre possibile integrare l'equazione di Wheeler-DeWitt e recuperare il regime semiclassico per la funzione d'onda dell'universo. In questo senso, le simmetrie di Nöther possono essere rilette come una regola di selezione nell'ambito del cosiddetto criterio di Hartle: quando esse esistono, è possibile selezionare universi classici.

Abstract. Minisuperspace cosmological models are considered for a class of gravitational theories nonminimally coupled with a scalar field. We show that, when a Nöther symmetry exists, it is always possible to integrate the Wheeler-DeWitt equation and to recover the semiclassical regime for the wave function of the universe. In this sense, the Nöther symmetries can be regarded as a selection rule in connection with the so called Hartle criterion: when they exist, it is possible to select classical universes.

1 Introduzione

L'obiettivo principale della cosmologia quantistica è di fornire *leggi per le condizioni iniziali* da cui possano aver avuto origine universi *classici*. La parola *classico* va qui

intesa in relazione a sistemi dinamici spaziotemporali coerentemente rappresentabili tramite la relatività generale. Accanto a ciò, la cosmologia quantistica permette di costruire modelli semplici che possono essere considerati come un primo passo verso la quantizzazione (canonica) della gravitazione e l'unificazione di tutte le interazioni fondamentali nella stessa teoria.

Tuttavia, tale punto di vista presenta alcune incongruenze dovute al fatto che una teoria quantistica della gravitazione ancora non esiste: infatti non è possibile costruire uno spazio di Hilbert [1] per gli *stati* che descrivono universi analogamente alle altre teorie di campo. Inoltre, l'equazione di Wheeler-DeWitt (WDW) [2], che determina l'evoluzione della funzione d'onda dell'universo ψ nel superspazio, è difficilmente trattabile matematicamente poiché presenta infiniti gradi di libertà. Infine, la cosiddetta interpretazione *Many Worlds* della meccanica quantistica, a partire dalla quale è possibile ipotizzare l'esistenza di più universi [3], non è accettata dall'intera comunità scientifica. Malgrado questa situazione, si sono trovati parecchi risultati positivi e, recentemente, la cosmologia quantistica può essere considerata uno schema teorico operativamente valido.

Ad esempio, lo spazio delle configurazioni di tutte le 3-geometrie spaziali e le configurazioni locali dei campi di materia (superspazio) può essere *ristretto* a particolari forme della metrica e dei campi materiali (omogenei ed isotropi oppure omogenei ed anisotropi): facendo questo, otteniamo spazi delle configurazioni finito-dimensionali (*minisuperspazi*) [4], dove l'equazione di WDW diviene un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine molto simile ad una equazione di Klein-Gordon. In questo contesto, l'enorme problema di integrare un sistema ad infiniti gradi di libertà è evitato e quindi diviene possibile formulare leggi per le condizioni iniziali per universi classici. Tra le proposte in questa direzione, due hanno avuto più successo: le *no boundary conditions* di Hartle e Hawking [5], e il *tunneling from nothing* di Vilenkin [6]. Le prime possono essere formulate in termini di *integrali sui cammini*, scegliendo appunto un cammino sulla classe di 4-metriche compatte e campi di materia regolari su tali metriche. Per calcolare la funzione d'onda sulle 3-geometrie, selezionate nel formalismo di Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [7], si

integra su tali 4-metriche calcolando l'integrale funzionale euclideo

$$\psi[h_{ij}, \phi] = \int_c Dg_{\mu\nu} D\phi e^I, \quad (1)$$

dove I è l'azione euclidea della gravitazione e della materia. Questa tecnica non può essere considerata una condizione al bordo nel superspazio, tuttavia, per particolari modelli (minisuperspazi), l'integrale sui cammini è facilmente calcolabile e quindi si ha una rilettura della (1) come legge per le condizioni al contorno.

La proposta di Vilenkin considera il comportamento della funzione d'onda nel superspazio. Ai bordi di questo, possiamo classificare le soluzioni come entranti o uscenti, così come le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon possono essere classificate secondo le energie positive e le energie negative. La proposta consiste nel fatto che le soluzioni posseggono solo modi uscenti nelle regioni del bordo del superspazio dove la 4-geometria è singolare. Questo *ansatz* può essere spiegato fisicamente considerando, in analogia all'elettrodinamica, le sole soluzioni d'onda uscenti da una sorgente e assumendo l'esistenza di un qualche parametro fondamentale che conduce il sistema ad un cambiamento di topologia; tale dinamica fa transire la metrica da una segnatura euclidea ad una lorentziana (ad esempio un'accelerazione massima) [8].

Anche se questi approcci sono formulati in modo sostanzialmente diverso, i risultati a cui conducono sono molto simili. Il problema principale rimane sulle soluzioni dell'equazione di WDW non interpretabili direttamente come ampiezze di probabilità.

Un criterio è stato proposto da Hartle [9] il quale suggerisce di considerare i picchi nella funzione d'onda dell'universo ψ (soluzione della WDW): quando essa è *fortemente piccata* in una qualche regione dello spazio delle configurazioni, abbiamo un'alta correlazione tra le variabili del sistema. Quando ψ non è piccata non ci sono correlazioni. Solo nella prima situazione otteniamo traiettorie classiche (cioè universi classici). Un ragionamento analogo vale nella meccanica quantistica non relativistica. Se noi abbiamo una barriera di potenziale ed una funzione d'onda, soluzione dell'equazione di Schrödinger, abbiamo un regime oscillatorio al di sopra

e al di fuori della barriera, mentre abbiamo un andamento esponenziale decrescente al di sotto della barriera. La situazione è simile in cosmologia quantistica, ma ora la barriera di potenziale deve essere sostituita con il superpotenziale $U = U(h_{ij}, \phi)$ nell'equazione di WDW. Considerando un particolare modello di minisuperspazio, le regioni oscillanti ed esponenziali corrispondono, rispettivamente, alle zone in cui U è positivo o negativo, anche se questo non è vero in tutti i casi [10]. Possiamo comprendere il comportamento di quanto accade usando la curvatura estrinseca

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{h}_{ij}) , \quad (2)$$

che è la cosiddetta *seconda forma fondamentale* definibile a partire dalla metrica ADM

$$ds^2 = - (N^2 - N_i N^i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j , \quad (3)$$

dove N e N_i sono le funzioni *lapse* e *shift*. Con una scelta semplice per il minisuperspazio, ci restringiamo a metriche omogenee della forma

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + e^{2\eta} d\Omega_3^2 , \quad (4)$$

dove $e^{2\eta}$ è il fattore di scala e $d\Omega_3^2$ è la metrica su una 3-varietà. Considerando la traccia dell'Eq.(2), otteniamo

$$K^2 = \frac{\dot{\eta}^2}{N^2} , \quad (5)$$

da cui il corrispondente operatore quantomeccanico è

$$\hat{K}^2 = -9e^{-6\eta} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} . \quad (6)$$

Una specie di valore di aspettazione per $\hat{K}^2$ può essere definito considerando la funzione d'onda dell'universo $|\psi\rangle$, soluzione dell'equazione di WDW, cioè

$$K^2 = \frac{\langle \psi | \hat{K}^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} , \quad (7)$$

che non ha un significato fisico immediato poiché non esiste una struttura di spazio di Hilbert per gli stati $|\psi\rangle$. La sola affermazione che possiamo fare è che nella

regione dove (7) è definita negativa, essa corrisponde ad una K^2 negativa nel limite classico, e quindi ad una regione classicamente proibita. In altri termini, non esiste una struttura causale, cioè uno spaziotempo di Lorentz. Quando la (7) è positiva, abbiamo una K^2 positiva nel limite classico e quindi una regione classicamente permessa. In questa zona, possiamo aspettarci spazitempi classici. Ora, K^2 è strettamente connessa alla struttura di U , [4] cosicché quando essa è positiva, abbiamo un comportamento oscillante per $|\psi| >$ (o semplicemente ψ nel limite semiclassico) che è piccata su configurazioni classiche e vale il criterio di Hartle. In conclusione, dobbiamo selezionare andamenti oscillanti di ψ per ottenere condizioni iniziali adatte all'evoluzione di universi classici.

In questo lavoro, si suggerisce un approccio che *naturalmente* fornisce l'andamento desiderato per classi estese di modelli di minisuperspazi. Seguendo quanto esposto in [11],[12],[13],[14],[15], cerchiamo delle simmetrie di Nöther per lagrangiane gravitazionali di punto non minimalmente accoppiate, nelle quali non specifichiamo l'accoppiamento $F(\phi)$ ed il potenziale $V(\phi)$ per il campo scalare ϕ . Tale campo rappresenta il contenuto di materia del sistema. Si dimostra che, quando una simmetria esiste, è sempre possibile *i)* selezionare un integrale primo del moto; *ii)* recuperare il regime oscillatorio per ψ ; *iii)* integrare esattamente la dinamica.

In altre parole, le simmetrie nötheriane sono in accordo con il criterio di Hartle: quando esse esistono, la funzione d'onda è piccata su configurazioni classiche (cioè è valido almeno per un sottoinsieme di essa), ed è possibile recuperare universi classici, cioè descrivibili secondo lo schema della relatività generale.

Il lavoro è organizzato nella maniera seguente. Il § 2 è rivolto alla discussione del limite semiclassico e dell'approssimazione WKB in cosmologia quantistica. Nel § 3, è discussa la tecnica delle simmetrie di Nöther nel formalismo lagrangiano, considerando anche le conseguenze nel formalismo hamiltoniano. Tramite l'applicazione della procedura di quantizzazione canonica, recuperiamo l'equazione di WDW ed il regime oscillante per ψ . Le soluzioni esatte per la suddetta classe di teorie sono esibite nel § 4. Il § 5 è rivolto alla discussione dei risultati e alla loro estensione a minisuperspazi più estesi per poter formulare congetture più generali.

2 Il limite semiclassico e l'approssimazione WKB

Il limite semiclassico ha un ruolo fondamentale in qualsiasi teoria della gravità quantistica. In cosmologia quantistica, esso fornisce un criterio interpretativo per la funzione d'onda ψ . Inoltre, le osservazioni sono basate su un modello di universo classico poiché non siamo in grado di ottenere dati nelle vicinanze ed oltre l'era di Planck.

In genere, il limite semiclassico è ricavato usando l'approssimazione WKB, grazie alla quale è possibile lavorare in analogia alla meccanica quantistica standard. Infatti, la funzione d'onda di un sistema quantistico ordinario può essere espansa in una serie di potenze di $\hbar$ ed il limite semiclassico corrisponde a $\hbar \rightarrow 0$ [16]. Possiamo scrivere l'equazione di WDW come

$$\left(\frac{1}{m_p^2} \nabla^2 - m_p^2 U \right) \psi[h_{ij}(x), \phi(x)] = 0, \quad (8)$$

dove m_p è la massa di Planck e ∇^2 è il superlaplaciano definito sul superspazio [1],[2]. Possiamo usare m_p^{-2} come parametro di controllo dell'espansione. Scriviamo

$$\psi[h_{ij}(x), \phi(x)] = \exp\{im_p^2 S\}, \quad (9)$$

dove

$$S \equiv S_0 + m_p^{-2} S_1 + \mathcal{O}(m_p^{-4}); \quad (10)$$

inserendo la Eq.(9) nella Eq. (8) ed eguagliando potenze simili di m_p , si ottiene l'equazione di Hamilton-Jacobi per S_0 :

$$\nabla S_0 \nabla S_0 + U = 0. \quad (11)$$

Agli ordini successivi, otteniamo equazioni per $S_1, S_2, \dots$, che si risolvono tenendo in considerazione i risultati agli ordini precedenti. Si dimostra che abbiamo bisogno del solo ordine S_0 per recuperare il limite semiclassico [4]. Quindi

$$\psi \simeq \exp\{im_p^2 S_0\}, \quad (12)$$

ci fornisce tutte le informazioni di cui abbiamo bisogno. Quando S_0 è reale, abbiamo modi WKB oscillanti ed il criterio di Hartle è valido poiché si dimostra che ψ è fortemente piccata su regioni dello spazio delle fasi definite dalle equazioni [4]

$$\pi^{ij} = m_p^2 \frac{\delta S_0}{\delta h_{ij}}, \quad (13)$$

$$\pi^\phi = m_p^2 \frac{\delta S_0}{\delta \phi}, \quad (14)$$

dove π^{ij} , π^ϕ sono momenti classici coniugati a h_{ij} e ϕ . Usando l'Eq.(11), si ha che le Eq.(13),(14) sono integrali primi delle equazioni del moto classiche che definiscono un insieme di soluzioni. Questa situazione, formalmente, risolve il problema delle condizioni iniziali. Per una data funzione S_0 , le Eq.(13),(14) implicano n parametri liberi (uno per ogni dimensione dello spazio delle configurazioni $Q \equiv \{h_{ij}, \phi\}$), ma la soluzione generale delle equazioni di campo implica $2n - 1$ parametri (uno per ogni equazione di Hamilton, tranne la condizione sull'energia). Da questo, la funzione d'onda è piccata su un sottoinsieme della soluzione generale. È in questo senso che le condizioni al contorno per la funzione d'onda (ad esempio le proposte di Hartle-Hawking o di Vilenkin) implicano le condizioni iniziali per le soluzioni classiche. In altri termini, nella regione dove ψ oscilla si ottiene una funzione S_0 data dall'equazione di Hamilton-Jacobi. Tale funzione seleziona un sottoinsieme di soluzioni classiche.

Inoltre, possiamo introdurre un parametro τ che permette di etichettare [1],[2] l'evoluzione lungo le traiettorie classiche (13),(14). Il vettore tangente su TQ , lo spazio delle fasi delle soluzioni classiche è

$$\frac{d}{d\tau} = \nabla S_0 \nabla, \quad (15)$$

cosicché τ è una specie di *tempo proprio* lungo le traiettorie ed è correlato alla dinamica su TQ , quando il limite semiclassico è valido, cioè quando ψ oscilla selezionando i momenti classici π^{ij} e π^ϕ . La regione semiclassica del superspazio, definita dalla struttura oscillante di ψ è la regione *lorenziana*. La parte esterna a questa è la regione *euclidea*; in quest'ultima abbiamo $S = iI$ e quindi

$$\psi = \exp\{-m_p^2 I\}, \quad (16)$$

dove I è l'azione per le soluzioni euclidee delle equazioni di campo classiche (*istantoni*). Chiaramente, nella (16) c'è una funzione esponenziale, ed il limite semiclassico per selezionare soluzioni lorentziane non è valido: dal criterio di Hartle non dobbiamo aspettarci universi classici.

Tutte queste considerazioni possono essere fatte usando la tecnica delle simmetrie di Nöther che selezionano *naturalmente* modelli validi nel limite semiclassico.

3 Le simmetrie di Nöther e la quantizzazione canonica

Discuteremo ora, in generale, il metodo usato in [11],[12],[13],[14],[15] per cercare soluzioni cosmologiche esatte e e mostreremo come sia possibile la sua utilizzazione nel presente contesto. Come passo finale, attueremo la quantizzazione canonica di Dirac. L'applicazione ad una classe specifica di teorie è presentata nella sezione successiva.

Consideriamo la lagrangiana di punto

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j), \quad (17)$$

che descrive un sistema dinamico definito sullo spazio delle configurazioni $Q \equiv \{q_j\}$, ($j = 1 \dots n$). È immediato notare che Q può essere un minisuperspazio n -dimensionale con un numero finito n di gradi di libertà. La dinamica è descritta dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (18)$$

Introduciamo un insieme di funzioni incognite $\{X^j(q)\}$ supponendo che esse dipendono solo dalle q_j . Contraiamo ora le equazioni di Eulero-Lagrange con $\{X^j(q)\}$ e quindi avremo

$$\frac{d}{dt} \left(X^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \left(X^j \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{dX^j}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathcal{L}. \quad (19)$$

È naturale introdurre il campo vettoriale

$$\mathbf{X} = X^j \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{dX^j}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, \quad (20)$$

che è il cosiddetto *lift* appartenente allo spazio tangente TQ dello spazio delle configurazioni Q [17]. Il membro di destra della (19) è la derivata di Lie della lagrangiana $\mathcal{L}$ rispetto al campo vettoriale $\mathbf{X}$. La quantità a sinistra della (19) può essere espressa usando la 1-forma di Cartan $\theta_{\mathcal{L}}$ associata ad $\mathcal{L}$, cioè

$$\theta_l \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} dq_j, \quad (21)$$

da cui

$$\langle \theta_{\mathcal{L}}, \mathbf{X} \rangle \equiv i_{\mathbf{X}} \theta_{\mathcal{L}} = X^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (22)$$

è la contrazione tra la 1-forma di Cartan ed il vettore $\mathbf{X}$. La (19) diviene

$$\frac{d}{dt}(i_{\mathbf{X}} \theta_{\mathcal{L}}) = L_{\mathbf{X}} \mathcal{L}. \quad (23)$$

Quando

$$L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0, \quad (24)$$

$\mathbf{X}$ è una simmetria di Nöther per $\mathcal{L}$ che è assegnata tramite l'insieme di funzioni $\{X^j(q)\}$. In questo caso, attraverso la (23), otteniamo la costante del moto

$$i_{\mathbf{X}} \theta_{\mathcal{L}} = \Sigma_0, \quad (25)$$

e dunque $d\Sigma_0/dt = 0$. Se noi operiamo il cambiamento di variabili

$$q_j = q_j(Q_k), \quad (26)$$

un semplice calcolo mostra che il vettore (20) può essere riscritto come

$$\mathbf{X} = (i_{\mathbf{X}} dQ_k) \frac{\partial}{\partial Q_k} + \left[\frac{d}{dt}(i_{\mathbf{X}} dQ_k) \right] \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_k}, \quad (27)$$

dove la contrazione $i_{\mathbf{X}}$ è operata rispetto al vettore $\mathbf{X}$, scritto nelle vecchie variabili, e la 1-forma dQ_k è data da $dQ_k = (\partial Q_k / \partial q_j) dq_j$. È possibile scegliere il nuovo insieme di variabili adattato alla *foliazione* fornita da $\mathbf{X}$ [17], e quindi

$$i_{\mathbf{X}} dQ_1 = \text{const}, \quad i_{\mathbf{X}} dQ_k = 0, \quad (28)$$

dove $k = 2, \dots, n$, e possiamo porre $const = 1$. Le (28) sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine che producono le $\{Q_1, Q_k\}$. Dalle (28), vediamo che il vettore (27) diviene

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial Q_1}, \quad (29)$$

e la condizione (24) altro non è che

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial Q_1} = 0, \quad (30)$$

dove

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}[q_j(Q_k), \dot{q}_j(Q_k, \dot{Q}_1, \dot{Q}_k)], \quad (31)$$

e $\tilde{\mathcal{L}}$ (che è $\mathcal{L}$ espressa nelle nuove variabili), è ciclica in Q_1 . La dinamica, nelle nuove variabili, è data da

$$\Sigma_0 = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_1}, \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial Q_k} = 0. \quad (33)$$

Le (33) sono più semplici delle (18) per via dell'integrale primo (32). Se siamo in grado di integrare il sistema (32)–(33), il problema del moto è completamente risolto e, attuando le trasformazioni inverse delle (26), recuperiamo l'evoluzione nelle vecchie variabili.

Trasliamo ora le considerazioni precedenti nel formalismo hamiltoniano. La funzione di Hamilton è

$$\mathcal{H} = \pi^j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j), \quad (34)$$

mentre le trasformate di Legendre danno

$$\pi^j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (35)$$

Dalla simmetria di Nöther, nel sistema di coordinate dove $\mathcal{L}$ è ciclica, abbiamo

$$\pi^1 \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_1} = i_{\mathbf{X}} \theta_{\mathcal{L}} = \Sigma_0. \quad (36)$$

Operiamo la quantizzazione canonica nel minisuperspazio n -dimensionale dato sopra e sia $\mathcal{L}$ una lagrangiana gravitazionale di punto definita su di esso; abbiamo

$$\pi^j \longrightarrow -i\partial_j, \quad (37)$$

$$\mathcal{H} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}. \quad (38)$$

Se $|\psi\rangle$ è uno *stato* del sistema (ad esempio, la funzione d'onda dell'universo) la sua dinamica è data da

$$i\partial_t|\psi\rangle = \Sigma_0|\psi\rangle, \quad (39)$$

$$\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle = 0, \quad (40)$$

e quindi, immediatamente, abbiamo una traslazione lungo l'asse Q_1 corrispondente ad un comportamento oscillante per $|\psi\rangle$ in quella direzione (essendo sempre $\Sigma_0 \in \mathbb{R}$).

In generale, avendo m simmetrie nötheriane, otterremo m direzioni nel minisuperspazio Q dove $|\psi\rangle$ ha un comportamento oscillante. Le m simmetrie forniscono m integrali primi del moto e quindi la possibilit   di selezionare traiettorie classiche, come visto nel paragrafo precedente. In un minisuperspazio bidimensionale, l'esistenza di una simmetria di Nöther permette di risolvere completamente il problema e di ottenere il limite semiclassico della cosmologia quantistica.

4 Le teorie non minimalmente accoppiate in un minisuperspazio di FRW

Recentemente, le teorie della gravitazione non minimalmente accoppiate hanno riscosso molto interesse grazie ad alcune questioni fondamentali correlate ad esse

i) ogni schema di grande unificazione richiede una qualche interazione tra materia e gravitazione nelle epoche primordiali dell'universo [18];

ii) supponendo una natura fondamentalmente quanto-meccanica per l'universo, dobbiamo considerare le costanti gravitazionale G_N e cosmologica Λ non come *costanti* dall'inizio dell'evoluzione, ma come funzioni del tempo [19];

iii) molti modelli inflazionari richiedono un accoppiamento non minimale per risolvere i problemi della cosiddetta *graceful exit* e dello spettro delle perturbazioni primordiali [20].

L'azione più generale nella quale il campo scalare ϕ è non minimalmente accoppiato allo scalare di Ricci R in quattro dimensioni è

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(\phi)R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi) \right], \quad (41)$$

dove $F(\phi)$ e $V(\phi)$ sono rispettivamente l'accoppiamento ed il potenziale del campo ϕ . Le equazioni di Einstein e di Klein-Gordon date dalla (41) sono fornite in [12],[15].

Consideriamo la densità di lagrangiana di Friedman-Robertson-Walker (FRW) deducibile a partire dalla (41). Avremo

$$\mathcal{L} = 6a\dot{a}^2 F(\phi) + 6\dot{a}\phi\dot{a}^2 F'(\phi) - 6kaF(\phi) + a^3 \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right], \quad (42)$$

dove k è la costante di curvatura spaziale, a è il fattore di scala dell'universo ed il punto indica la derivata rispetto al tempo. Per semplicità, porremo $k = 0$, ma tutti i seguenti risultati possono essere estesi ai casi $k = \pm 1$. Tale lagrangiana è definita nello spazio delle configurazioni $Q \equiv \{a, \phi\}$, il quale è un minisuperspazio bidimensionale. Dobbiamo notare che non è stata assegnata alcuna forma funzionale a $F(\phi)$ e $V(\phi)$. Una simmetria n  theriana esiste quando la (24)    valida. In questo caso, il vettore $\mathbf{X}$ ha la forma

$$\mathbf{X} = \alpha(a, \phi) \frac{\partial}{\partial a} + \beta(a, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{a}} + \frac{d\beta}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}, \quad (43)$$

dove α e β sono l'insieme delle funzioni che prima abbiamo chiamato $\{X^j(q)\}$, ($j = 1, 2$). La condizione (24) corrisponde al sistema

$$F(\phi) \left(\alpha + 2a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) + aF'(\phi) \left(\beta + a \frac{\partial \beta}{\partial a} \right) = 0, \quad (44)$$

$$3\alpha + 12F'(\phi) \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + 2a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} = 0, \quad (45)$$

$$a\beta F''(\phi) + \left(2\alpha + a \frac{\partial \alpha}{\partial a} + a \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \right) F'(\phi) + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} F(\phi) + \frac{a^2}{6} \frac{\partial \beta}{\partial a} = 0, \quad (46)$$

$$3\alpha V(\phi) + a\beta V'(\phi) = 0, \quad (47)$$

la cui soluzione, se esiste, fornisce $\alpha, \beta, F(\phi)$ e $V(\phi)$ (e le loro connessioni con k ed il numero delle dimensioni spaziali [13]). Nel caso presente, la simmetria di Nöther esiste [12] ed abbiamo

$$\alpha(a, \phi) = -\frac{2}{3}p(s)\beta_0 a^{s+1}\phi^{m(s)-1}, \quad \beta(a, \phi) = \beta_0 a^s \phi^{m(s)}, \quad (48)$$

e

$$F(\phi) = D(s)\phi^2, \quad V(\phi) = \lambda\phi^{2p(s)}, \quad (49)$$

dove s è un parametro libero [12],[14] e

$$D(s) = \frac{(2s+3)^2}{48(s+1)(s+2)}, \quad p(s) = \frac{3(s+1)}{2s+3}, \quad m(s) = \frac{2s^2+6s+3}{2s+3}. \quad (50)$$

I casi $s = 0$, $s = -3$, $s = -1$, $s = -2$ sono speciali e devono essere trattati separatamente, come si è fatto in [12]. Usando le (28), otteniamo le nuove coordinate

$$w = \sigma_0 a^3 \phi^{2p(s)}, \quad z = \frac{3}{\beta_0 \chi(s)} a^{-s} \phi^{1-m(s)}, \quad (51)$$

dove σ_0 è una costante di integrazione e

$$\chi(s) = -\frac{6s}{2s+3}. \quad (52)$$

La lagrangiana (42) con $k = 0$ diviene

$$\tilde{\mathcal{L}} = \gamma(s)w^{s/3}\dot{z}\dot{w} - \lambda w, \quad (53)$$

che è ciclica in z e

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sigma_0^s} \frac{2s+3}{12(s+2)(s+1)}. \quad (54)$$

Operando le trasformate di Legendre, abbiamo

$$\pi_z \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}} = \gamma(s)w^{s/3}\dot{w}, \quad \pi_w \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{w}} = \gamma(s)w^{s/3}\dot{z}, \quad (55)$$

da cui la hamiltoniana del sistema è

$$\mathcal{H} = \frac{\pi_z \pi_w}{\gamma(s)w^{s/3}} + \lambda w. \quad (56)$$

Grazie all'esistenza della simmetria di Nöther, abbiamo

$$\pi_z = \Sigma_0. \quad (57)$$

Quantizziamo ora canonicamente il sistema:

$$\pi_z \rightarrow -i\partial_z, \quad \pi_w \rightarrow -i\partial_w, \quad (58)$$

e, con una semplice scelta per il *factor-ordering* [18], avremo

$$\left\{ (i\partial_z)(i\partial_w) + \lambda\gamma(s)w^{(s+3)/3} \right\} |\psi\rangle = 0, \quad (59)$$

che è l'equazione di WDW, e

$$-i\partial_z|\psi\rangle = \Sigma_0|\psi\rangle, \quad (60)$$

che è un'equazione agli autovalori rappresentante una traslazione lungo z . Sostituendo la (60) nella (59), otteniamo $|\psi\rangle$ per separazione delle variabili, cioè

$$|\psi\rangle = |\Omega(w)\rangle|\chi(z)\rangle \propto \exp(-i\Sigma_0 z) \exp\left(-i\gamma(s)\lambda w^{(s+6)/3}\right). \quad (61)$$

È chiaro che $|\psi\rangle$ ha un comportamento oscillante ed il criterio di Hartle è recuperato. Nel limite semiclassico, la funzione di Hamilton (56) altro non è che l'energia $E_{\mathcal{L}}$ correlata alla lagrangiana $\mathcal{L}$. Essa corrisponde all'equazione di Einstein del primo ordine che deve essere

$$E_{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}} \dot{z} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}} - \tilde{\mathcal{L}} = 0. \quad (62)$$

Quindi, considerando le (55), abbiamo due equazioni per i momenti classici π_z e π_w che risolvono completamente il problema del moto. Otteniamo [12]

$$w(t) = [k_1 t + k_2]^{3/(s+3)}, \quad (63)$$

$$z(t) = [k_1 t + k_2]^{(s+6)/(s+3)} + z_0, \quad (64)$$

e, nelle vecchie variabili,

$$a(t) = a_0(s)(t - t_0)^{l(s)}, \quad (65)$$

$$\phi(t) = \phi_0(s)(t - t_0)^{q(s)}, \quad (66)$$

dove k_1 , k_2 , $a_0(s)$, $\phi_0(s)$ e t_0 sono costanti di integrazione (dipendenti da s) e

$$l(s) = \frac{2s^2 + 9s + 6}{s(s + 3)}, \quad q(s) = -\frac{2s + 3}{s}. \quad (67)$$

Considerando tutti i possibili valori del parametro s , abbiamo evoluzioni cosmologiche *power-law*, *pole-like* e *friedmaniane*. Quando $s = -3$ [non incluso nelle (65), (66)] otteniamo il limite einsteiniano standard alle basse energie (accoppiamento minimale) [14],[15]; quando $s = 0$, c'è analogia con la cosmologia di stringa-dilatone [14],[21]. In questo modo, abbiamo completamente risolto l'equazione di WDW per una classe di teorie e pienamente recuperato il limite semiclassico. Dunque, la simmetria di Nöther permette di selezionare universi classici. Inoltre, il vettore $\mathbf{X}$ dato dalla Eq.(43) può essere facilmente identificato con il vettore¹ nella (15), e quindi la simmetria di Nöther introduce anche una cronologia intrinseca sulle traiettorie classiche del minisuperspazio.

5 Una congettura più generale e conclusioni

La discussione precedente ci dice che se una teoria possiede simmetrie nötheriane, è sempre possibile recuperare il limite semiclassico della cosmologia quantistica, poiché la funzione d'onda dell'universo, soluzione dell'equazione di WDW, ha almeno una componente oscillante. Inoltre, è chiaro che in un minisuperspazio n -dimensionale, abbiamo bisogno di n costanti del moto per recuperare il limite semiclassico della teoria. Evitando l'approssimazione WKB, quando esistono $(n - 1)$ simmetrie di Nöther, tutta la funzione d'onda dell'universo giace nella regione lorentziana poiché ci sono $(n - 1)$ costanti del moto che, insieme alla funzione energia, selezionano n componenti oscillanti per la ψ . Infatti, considerando un minisuperspazio 4-dimensionale, come fatto in [22] per ricercare le simmetrie in un modello di Bianchi I con un

¹Infatti, abbiamo

$$(\nabla S_0)\nabla = \frac{\partial S_0}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{d}{d\tau}$$

essendo $S_0 = S_0(a, \phi)$

campo scalare, otteniamo tre costanti del moto (cioè tre simmetrie nötheriane). Quindi anche in questo caso otteniamo che ψ   completamente definita nella regione lorentziana del minisuperspazio ed esistono traiettorie classiche (soluzioni della dinamica).

Concludiamo che le simmetrie di Nöther sembrano essere delle *regole di selezione* che ci dicono se un modello definito in dato superspazio possiede oppure no un limite semiclassico, cio  se   possibile fornire condizioni iniziali per generare universi classici.

BIBLIOGRAFIA

1. B.S. DeWitt, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
2. J.A. Wheeler, in *Battelle Rencontres*, eds. C. DeWitt e J.A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968); C.W. Misner, in *Relativity* ed. Carmeli, Fickler e Witten (Plenum, San Francisco, 1970);
C.W. Misner, in *Magic Without Magic*, ed. J. Klauder (W.H. Freeman, San Francisco, 1972).
3. V.F. Mukhanov in *Proceedings of The Third Seminar on Quantum Gravity, Moscow*, ed. Markov, V.A. Berezin e V.P. Frolov (World Scientific, Singapore, 1984).
4. J.J. Halliwell, *Nucl. Phys.* **B 266**, 228 (1986);
J.J. Halliwell, *Phys. Rev.* **D 36**, 3626 (1987);
J.J. Halliwell, in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, eds. S. Coleman, J.B. Hartle, T. Piran e S. Weinberg (World Scientific, Singapore, 1991).
5. J.B. Hartle e S.W. Hawking, *Phys. Rev.* **D 28**, 2960 (1983).
S.W. Hawking e D.N. Page, *Nucl. Phys.* **B 264**, 185 (1986).

6. A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **33**, 3560 (1986);
A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **37**, 888 (1988);
S. Del Campo e A. Vilenkin, *Phys. Lett. B* **224**, 45 (1989)
7. R. Arnowitt, S. Deser, e C.W. Misner, *Phys. Rev.* **113**, 745 (1959);
R. Arnowitt, S. Deser, e C.W. Misner, *Phys. Rev.* **117**, 1595 (1960).
8. S. Capozziello e A. Feoli, *Int. Journ. Mod. Phys. D* **2**, 79 (1993);
E.R. Caianiello, S. Capozziello, R. de Ritis, A. Feoli, G. Scarpetta, *Maximal Acceleration Tunneling from Nothing* in stampa su *Int. Journ. Mod. Phys. D* (1994).
9. J.B. Hartle, in *Gravitation in Astrophysics* Cargese, 1986, eds. B. Carter and J.B. Hartle (Plenum, New York, 1986).
10. E. Carugno, S. Capozziello e F. Occhionero, *Phys. Rev. D* **47**, 4261, (1993).
11. R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro e C. Stornaiolo, *Phys. Rev. D* **42**, 1091 (1990);
R. de Ritis, G. Platania, C. Rubano e R. Sabatino, *Phys. Lett. A* **161**, 230 (1991);
R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro e C. Stornaiolo, *Phys. Lett. A* **149**, 79 (1990).
12. S. Capozziello e R. de Ritis, *Phys. Lett. A* **177**, 1 (1993).
13. S. Capozziello, R. de Ritis e P. Scudellaro, *Nöther's Symmetry in Nonflat Cosmologies*, in stampa su *Il Nuovo Cimento B* (1994).
14. S. Capozziello, R. de Ritis e P. Scudellaro, *Int. Journ. Mod. Phys. D* **2**, 463 (1993).
15. S. Capozziello e R. de Ritis, *Class. Quantum Grav.* **11**, 107 (1994).
16. L. Landau e E.M. Lifschitz, *Théorie des Champs*, (ed. Mir, Moscou, 1970).

17. R. Abraham e J. Marsden, *Foundation of Mechanics* (1978) (New York: Benjamin)
- G. Marmo, E.J. Saletan, A. Simoni e B. Vitale, *Dynamical Systems. A Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction* (1985) (New York: Wiley)
18. N.D. Birrell e P.C.W. Davies *Quantum Fields in Curved Space* Cambridge Univ. Press (Cambridge 1982)
19. D.W. Sciama, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **113**, 34 (1953);
C. Brans and R.H. Dicke, *Phys. Rev* **124**, 925 (1961);
A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 417 (1979);
L. Smolin, *Nucl. Phys.* **B 160**, 253 (1979);
S. Adler, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1567 (1980).
20. A. Guth, *Phys. Rev.* **D 23**, 347 (1981);
A. Guth, *Phys. Lett.* **108 B**, 389 (1982);
D. La e P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 376 (1989);
D. La, P.J. Steinhardt e E.W. Bertschinger, *Phys. Lett.* **B 231**, 231 (1989);
A.D. Linde *Phys. Lett.* **B 238**, 160 (1990);
R. Holman, E.W. Kolb, S. Vadas e Y. Wang, *Phys. Rev.* **D 43**, 995 (1991).
21. S. Capozziello e R. de Ritis, *Int. Journ. Mod. Phys.* **D 2**, 373 (1993).
22. M. Demianski, R. de Ritis, C. Rubano e P. Scudellaro, *Phys. Rev.* **D 46**, 1391 (1992)

* Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Via Moiarriello n. 16, 80131 Napoli.
I. N. F. N., Sezione di Napoli, Mostra d'Oltremare pad. 19, 80125 Napoli